GEOMETRÍA

- Desarrollo sistemático del curso
- Temas didácticamente explicados
- Datos de cultura general
- Banco de preguntas tipo admisión

AUGE
ACADEMIA ONLINE

DEFINICIONES BÁSICAS SEGMENTOS Y ÁNGULOS

1.1 CONCEPTO DE GEOMETRIA

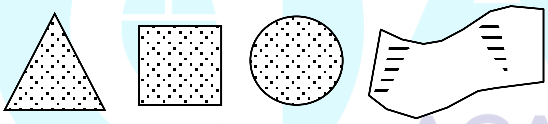
La Geometría es la ciencia que estudia las propiedades de las figuras geométricas, atendiendo a su forma, tamaño y relación entre ellas.

Una figura geométrica es un conjunto no vacío de puntos, representada por líneas, superficies y sólidos. Toda figura se distingue de otra por su tamaño y forma.

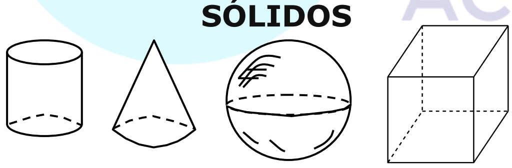
LINEAS

L. Recta L. Quebrada L curva L. Mixta

SUPERFICIES



SÓLIDOS



cilindro cono esfera cubo

1.2 ETIMOLOGIA

La palabra Geometría procede de las palabras griegas "geos" que significa "Tierra" y "metron" que significa medida, es decir geometría deriva de la palabra griega que significa "medida de la tierra", concepto que no estuvo muy desligado de la realidad en sus comienzos, como una necesidad de solucionar el problema de los deslindes (delimitación) de tierras originados por las inundaciones periódicas del río Nilo en el antiguo Egipto.

1.3 CONCEPTOS PRIMITIVOS

Los conceptos primitivos no definidos de la geometría son el punto, la línea y el plano.

1.3.1 El Punto:

- Es un concepto imaginario
- Tiene ubicación
- No tiene longitud: anchura o grosor
- Lo idealizamos al cortarse dos rectas

- Un punto dibujado a diferencia de un punto conceptual, tiene tamaño.

Se designa al punto conceptual por medio de una letra mayúscula junto al punto dibujado o un aspa.

Ejemplo:

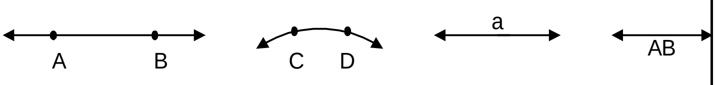
.A .B xC x D

1.3.2 La Línea:

- Es un concepto imaginario
- Tiene longitud pero no anchura o grosor
- No se puede medir
- Es ilimitada en ambos sentidos
- Puede ser recta, curva o una combinación de ambas
- La línea recta tiene dirección

Una línea se designa con letras mayúsculas en dos puntos cualesquiera |doble flecha, pone de manifiesto que la línea se extiende indefinidamente en ambos sentidos:

Ejemplo:



Puntos Colineales. Son aquellos que pertenecen a una misma línea recta.

Puntos No Colineales. Son aquellos que no están ubicados en una misma línea recta.

1.3.3 El Plano:

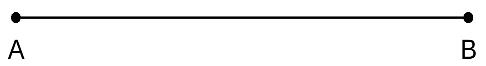
- Es un concepto imaginario
- Tiene dos dimensiones
- No se puede medir
- No tiene espesor
- Superficie plana ilimitada en todo sentido

Postulados sobre planos

* Existen infinitos planos
* Por tres puntos no colineales pasa un plano y solamente uno
* En cualquier plano existen infinitos puntos y rectas

1.4 SEGMENTO DE RECTA

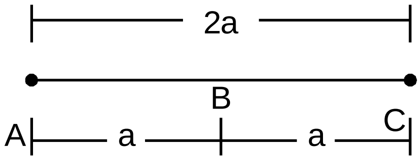
Es una porción de recta limitado por dos puntos denominados extremos.



Se denota por $\overline{AB}$ y se lee segmento AB. La medida de un segmento AB denota por m$\overline{AB}$ o AB, y es un número positivo que compara la longitud del segmento dado con la longitud del segmento unitario (u).

1.4.1 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

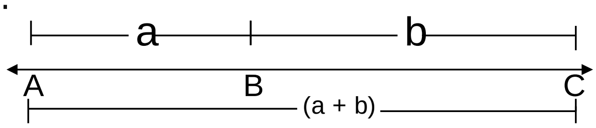
Un punto B se llama punto medio de un segmento $\overline{AC}$, si B está entre A y C y se verifica que AB = BC.



1.4.2 OPERACIONES CON SEGMENTOS

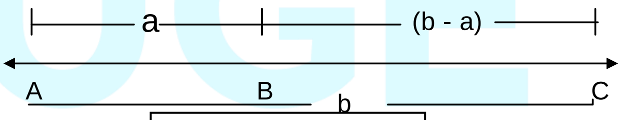
Para sumar dos segmentos cualesquiera, se toman en una recta dos segmentos consecutivos cualesquiera y congruentes respectivamente a los segmentos que se quieren sumar.

Suma:



$$\boxed{AC = AB + BC}$$

Diferencia:



$$\boxed{BC = AC - AB}$$

1.5 ANGULO

rayos que tienen el mismo punto de origen.

Elementos

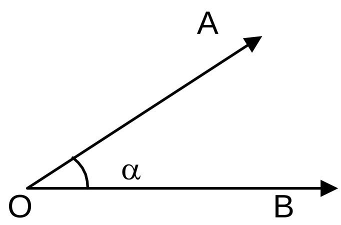
Lados: $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

Vértice: O

Notación

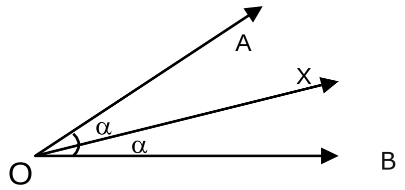
$\widehat{AOB}$, $\measuredangle$ AOB

$\measuredangle$ O, $\widehat{O}$



$m\widehat{AOB} = \alpha^o$: Medida del ángulo AOB es igual a α^o

Bisectriz de un Angulo:
Es el rayo que partiendo del vértice de un ángulo, lo divide en dos ángulos congruentes.



$\overline{OX}$: Bisectriz de $\measuredangle$ AOB

$m\widehat{AOX} = m\widehat{XOB} = \alpha$

$$\boxed{\widehat{AOX} \cong \widehat{XOB}}$$

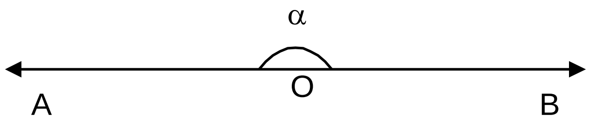
Clasificación de los Angulos

Los ángulos se clasifican según su medida, de acuerdo a su posición y según sus características.

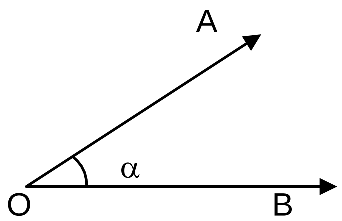
I. SEGÚN SU MEDIDA

1. Angulo Llano. Llamado también ángulo rectilíneo, es aquel ángulo cuyos lados son dos rayos opuestos es decir una recta. Su medida en;

- Sistema Sexagesimal: $\alpha = 180^o$

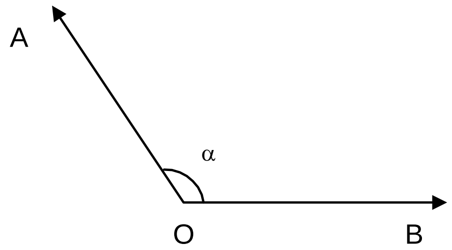


2. Angulo Agudo. Es aquel ángulo cuya medida es menor que 90º pero mayor que 0º



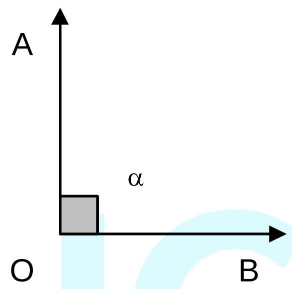
$$\boxed{0^o < \alpha^o < 90^o}$$

3. **Angulo Obtuso**: Es aquel ángulo cuya medida es menor que 180º pero mayor que 90º



$$\boxed{90^o < \alpha^o < 180^o}$$

4. Angulo Recto: Es aquel ángulo cuya medida es igual a 90º.



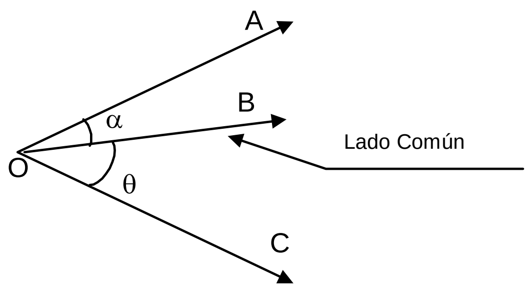
$$\boxed{\alpha = 90^o}$$

5. Angulo Nulo: Es aquel ángulo cuya medida es igual a 0º

$$\boxed{m\widehat{AOB} = 0^o}$$

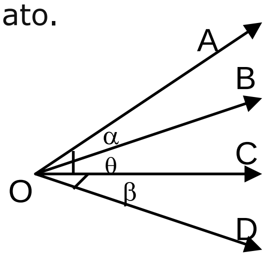
II. SEGUN LA POSICION DE SUS LADOS

1. Angulos Adyacentes. Dos ángulos son adyacentes cuando tienen el mismo vértice y un lado común tal que los ángulos se encuentran a uno y otro lado del lado común.

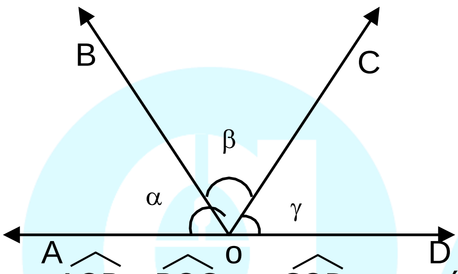


$\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son ángulos adyacentes, llamado también ángulos consecutivos.

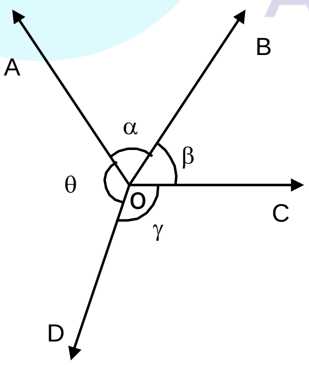
Dos o más ángulos serán adyacentes cuando cada uno de ellos es adyacente con su inmediato.



$\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ y $\widehat{COD}$ son ángulos adyacentes.



$\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ y $\widehat{COD}$ son ángulos adyacentes sobre una recta.

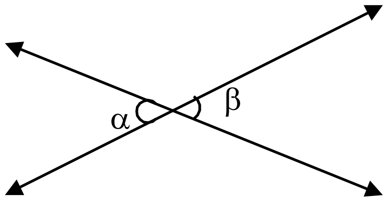


$\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ y $\widehat{AOD}$ son ángulos adyacentes alrededor de un punto

2. Ángulos Opuestos por el Vértice

Son dos ángulos en donde los lados de uno son los rayos opuestos del otro.

Es decir, se determinan al trazar dos rectas secantes, dichos ángulos con congruentes (tienen la misma medida).

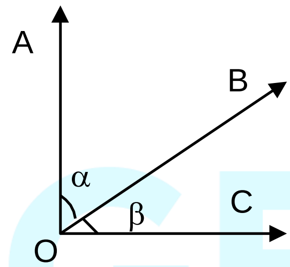


$$\boxed{\alpha = \beta}$$

III. SEGUN SUS CARACTERÍSTICAS

1. Angulos Adyacentes Complementarios

Son dos ángulos adyacentes cuyas medidas suman 90º.

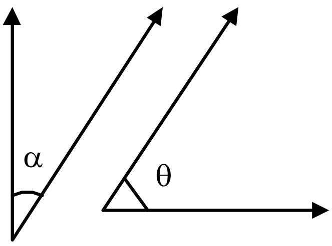


$\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son ángulos adyacentes complementarios

$$\boxed{\alpha + \beta = 90º}$$

2. Ángulos Complementarios

Son dos ángulos cuyas medidas suman 90º.



$$\boxed{\alpha + \theta = 90º}$$

Nota 1. Complemento de un ángulo es lo que le falta a este ángulo para medir 90º.

$$\boxed{\text{COMPLEMENTO DE } \alpha = 90º - \alpha = \theta}$$

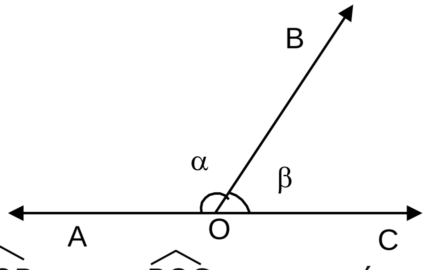
Nota 2:

1º <> 60´ , 1´ <> 60”

90º <> 89º60´ <> 89º59´60”

3. Ángulos Adyacentes Suplementarios

Son dos ángulos adyacentes cuyas medidas suman 180º.

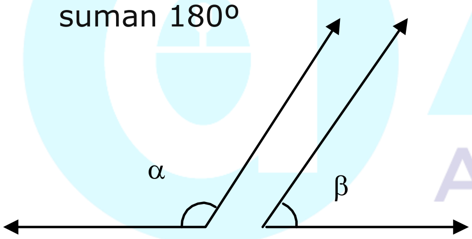


$\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son ángulos adyacentes suplementarios.

$$\boxed{\alpha + \beta = 180º}$$

4. Ángulos Suplementarios

Son dos ángulos cuyas medidas suman 180º



$$\boxed{\alpha + \beta = 180º}$$

Nota 3. Suplemento de la medida de un ángulo es lo que le falta para medir 180º.

$$\boxed{\textbf{SUPLEMENTO DE } \alpha = 180º - \alpha = \beta}$$

Nota 4:

180º <> 179º60´<>179º59´60”

Nota 5:

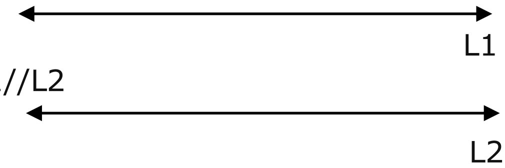
Cuando la palabra suplemento se repite un número par de veces, el resultado es el mismo valor del ángulo y si el número es impar, el resultado es su suplemento.

$\underbrace{\text{Sup del Sup ……… Sup}}_{\#\text{ro. veces par}}$ de $\alpha = \alpha$

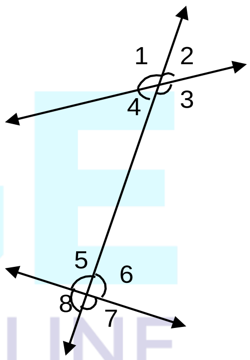
$\underbrace{\text{Sup del Sup ……… Sup}}_{\#\text{ro. veces impar}}$ de $\alpha = 180º - \alpha$

ANGULOS ENTRE PARALELAS

Paralelas: Se llama rectas paralelas cuando no tienen ningún punto en común y están situados en un mismo plano.



Ángulos formados por dos rectas al ser cortados por una Secante



Angulos Internos $\begin{cases} 3,4 \\ 5,6 \end{cases}$

Angulos Externos $\begin{cases} 1,2 \\ 7,8 \end{cases}$

Alternos Internos $\begin{cases} 4 \text{ y } 6 \\ 3 \text{ y } 5 \end{cases}$

Alternos Externos $\begin{cases} 1 \text{ y } 7 \\ 2 \text{ y } 8 \end{cases}$

Conjugados Internos $\begin{cases} 4 \text{ y } 5 \\ 3 \text{ y } 6 \end{cases}$

Conjugados Externos $\begin{cases} 1 \text{ y } 8 \\ 2 \text{ y } 7 \end{cases}$

Ángulos correspondientes $\begin{cases} 1 \text{ y } 5;\ 2 \text{ y } 6 \\ 4 \text{ y } 8;\ 3 \text{ y } 7 \end{cases}$

ANGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS AL SER CORTADOS POR UNA SECANTE

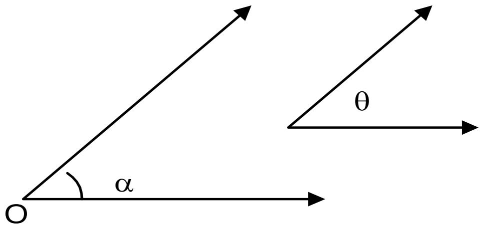
a) Los ángulos alternos internos o externos son congruentes.

b) Los ángulos conjugados internos o externos son suplementarios.

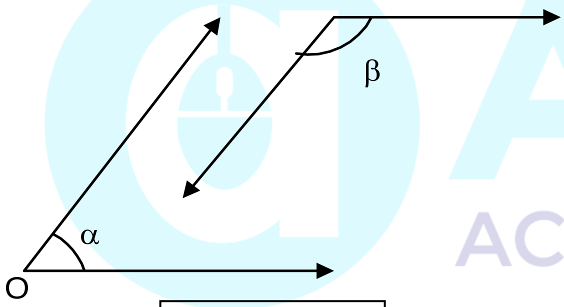
c) Los ángulos correspondientes son congruentes.

ANGULOS DE LADOS PARALELOS

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, serán congruentes cuando ambos ángulos sean agudos o cuando ambos sean obtusos; y serán suplementarios cuando uno de ellos sea agudo y el otro sea obtuso.



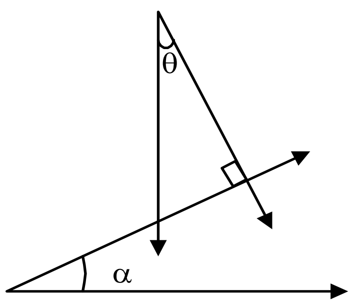
$\alpha = \theta$



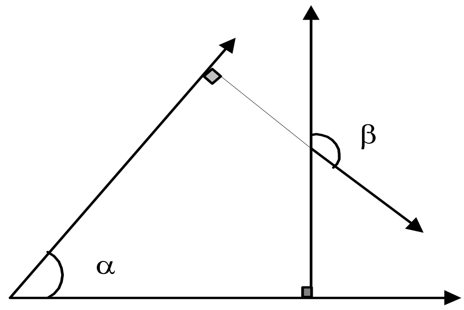
$\alpha + \beta = 180º$

ANGULOS DE LADOS PERPENDICULARES

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares serán congruentes cuando ambos sean agudos o cuando ambos sean obtusos; y serán suplementarios cuando uno de ellos sea agudo y el otro obtuso.



$\alpha = \theta$



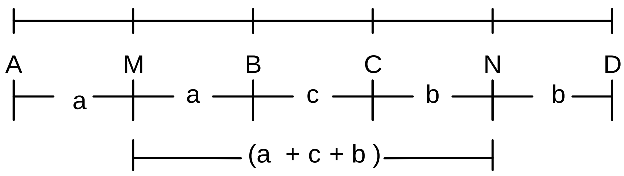
$\alpha + \beta = 180$

PROBLEMAS RESUELTOS

01. Sobre una línea recta se considera los puntos consecutivos A, B, C y D. Luego los puntos medios M y N de AB y CD respectivamente. Hallar MN si: AC + BD = 50.

a) 20 b) 25 c)30
d) 40 e) 50.

Resolución



1) Dato: M y N son puntos medios de AB y CD.

AM = MB = a , CN = ND = b

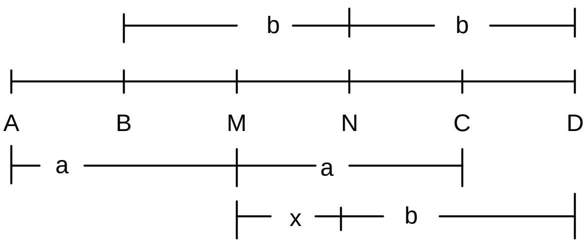
2) Dato: AC + BD = 50
(2a + c) + (c + 2b) = 50
2a + 2c + 2b = 50
2 (a + c + b) = 50
2MN = 50

MN = 25 **Rpta. B**

02. sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Luego los puntos medios M y N de AC y BD respectivamente. Hallar MN si: AB + CD = 60

a) 20 b) 25 c) 30
d) 40 e) 60

Resolución



1) Dato: M y N puntos medios de AC y BD
AM = NC = a , BN = ND = b

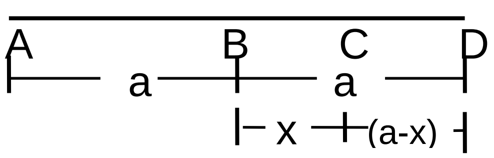
2) Dato: AB + CD = 60
$(a + x - b) + (x + b - a) = 60$
$2x = 60$
$x = 30$

$\boxed{MN = 30}$ **Rpta. C**

03. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que B es punto medio de AD y AC – CD = 50. Hallar BC

a) 20 b) 25 c) 30
d) 40 e) 50

Resolución



1) Dato: B es punto medio de AD
AB = BD = a

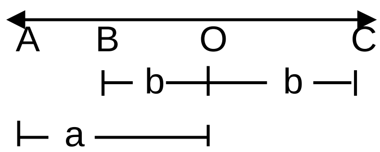
2) Dato AC – CD = 50
$(a + x) - (a - x) = 50$
$2x = 50$
$x = 25$

$\boxed{BC = 25}$ **Rpta. B**

04. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C siendo "0" punto medio de BC, $AB^2 + AC^2 = 100$.
Hallar $A0^2 + B0^2$

a) 10 b) 25 c) 50
d) 100 e) 20

Resolución



1) Como nos pide $AO^2 + BO^2$ ponemos AO = a y BO = b

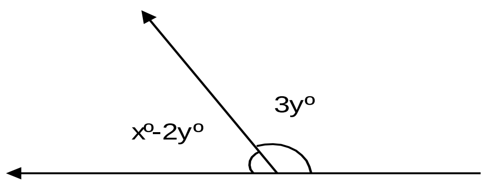
2) Dato: O punto medio de $\overline{BC}$
BO=OC=b

3) Dato: $AB^2 + AC^2 = 100$
$(a - b)^2 + (a + b)^2 = 100$
$2(a^2 + b^2) = 100$
$a^2 + b^2 = 50$

$\boxed{AO^2 + BO^2 = 50}$ **Rpta. C**

05. En el gráfico, halle el máximo valor entero de y.

a) 45
b) 50
c) 60
d) 59
e) 58



Resolución

1) $x^o - 2y^o + 3y^o = 180^o$
$x^o + y^o = 180^o$

$\boxed{x^o = 180^o - y^o}$ (I)

2) Todo ángulo es positivo
$0^o < x^o - 2y^o$
$2y^o < x^o$ (II)

3) I en II
$2y^o < 180^o - y^o$
$3y^o < 180^o$
$y^o < 60^o$

$\boxed{y = 59}$ **Rpta. D**

06. La diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es 6 veces el ángulo. El suplemento del complemento de dicho ángulo es:
a) 15º b) 75º c) 105º
d) 120º e) 150º

Resolución

1) Sup α - Comp α = 6α
$(180^o - \alpha) - (90^o - \alpha) = 6\alpha$

$\boxed{\alpha = 15^o}$

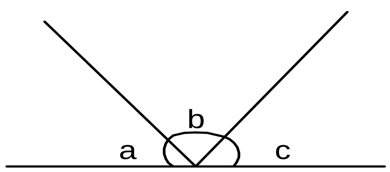
2) Nos piden E
E = Sup. Comp. 15º
E = Sup. 75º

$\boxed{E = 105^o}$ **Rpta. C**

07. Las medidas de tres ángulos consecutivos sobre una recta están en progresión aritmética. Calcular la medida del mayor ángulo, si el menor y el mayor están en la relación de 3 a 7.

a) 30º b) 36º c) 42º
d) 60º e) 84º

Resolución

1)


a, b y c están en progresión aritmética

Dato: $\frac{a}{c} = \frac{3}{7}$, a = 3k c = 7k

2) $b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow b = \frac{3k+7k}{2}$

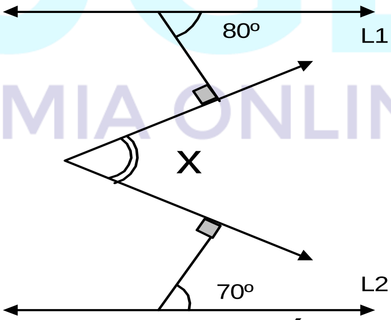
b = 5k

3) a + b + c = 180º
3k + 5k + 7k = 180º
15k = 180º
k = 12º

4) El mayor ángulo es c = 7k
c = 7 (12º)

$\boxed{c = 84^o}$ **Rpta. E**

08. Calcular x si: $L_1//L_2$
a) 10º b) 20º
c) 30º d) 40º
e) 50º

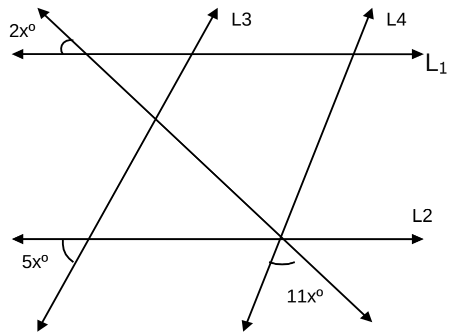


Resolución
Propiedad (Serrucho)
80º + x + 70º = 90º + 90º

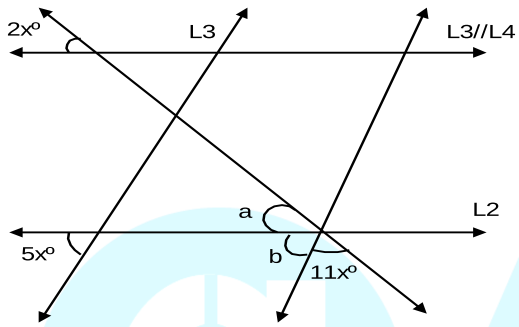
$\boxed{x = 30^o}$ **Rpta. C**

09. En la figura $L_1//L_2$ y $L_3//L_4$, el valor numérico de $3x^o - 12^o$ es:

a) 15º b)16º c)17º
d) 18º e) 19º



Resolución



1) $a + b + 11x^o = 180^o$....... I
2) Angulos correspondientes
$a = 2x^o$, $b = 5x^o$...... II
3) II en I:
$2x^o + 5x^o + 11x^o = 180^o$
$18x^o = 180^o$

$\boxed{x^o = 10^o}$

4) Hallanfo E:
$E = 3x^o - 12^o$
$E = 3(10^o) - 12^o$

$\boxed{\mathbf{E = 18^o}}$ **Rpta. D**

EJERCICIOS

1. Dado los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D y E tal que: AC = DE; BC = CD y CE – AB = 10. Calcule "BD"

A) 10 B) 5 C) 6
D) 8 E) 20

2. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D; tal que AC = BD; (BD)(AB – BC) = 12 y (CD)(BC) = 8. Calcular "BC"

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D; tal que: BC=2(AB)= 2(CD) y (AC)(BD) = 81. Calcular "BC"

A) 9 B) 3 C) 12
D) 6 E) 8

4. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos P, Q, R, S, T; tal que: PR = QS = RT y PQ + ST = 6. Calcular "PT"
A) 6 B) 5 C) 12
D) 18 E) 15

5. Dados los puntos colineales y consecutivos A, B y C; M y N bisecan a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente: AB + MN + BC = 60; hallar "AC"

A) 40 B) 50 C) 30
D) 20 E) 15

6. En un recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F; tal que: AB = DE; CD = EF; AC = 30; CF = 40 y AB + CD = 30. Hallar "BC"

A) 16 B) 15 C) 20
D) 10 E) 5

7. En una recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D y E; tal que: 3(CE) = 2(AC); AE = 50 y AB + DE = 20 y "C" biseca al segmento $\overline{BE}$; hallar "BD"

   A) 20 B) 10 C) 30
   D) 15 E) 25

8. Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D: tal que: 4(AB) = 3(BC) = 6(CD) y 3(BC – AB)=2(BC – CD) – 2; hallar "BD"

   A) 20 B) 6 C) 12
   D) 4 E) 1

9. En una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D; se sabe que AC= $\sqrt{m}$ y se cumple las siguientes relaciones: AB.AD = BC.CD; $BC^2 - AB^2$= AB. CD. Hallar (CD^2)

   A) m^2 B) $\sqrt{m}$ C) $\sqrt{\sqrt{m}}$
   D) m E) $m^2/2$

10. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos P, Q, R y S con la siguiente condición:
    $\dfrac{PQ}{PS} = \dfrac{mQR}{nRS}$ y $\dfrac{n}{QR} - \dfrac{m+n}{PR} = 1$.
    Hallar RS

    A) m B) n C) m - n
    D) (m – n)/2 E) 2(m - n)

11. Si los x/y del complemento de la diferencia entre el suplemento y el complemento de "a" es igual a los m/n de la diferencia entre el complemento de β y el suplemento del suplemento de β . Hallar β

    A) 45° B) 40° C)50°
    D) 55° E) 60

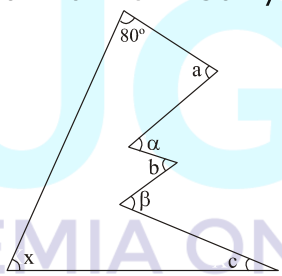
12. Dados los ángulos consecutivos: AOB, BOC y COD, tal que m∠AOC = 70°; m ∠ BOD = 80° y m ∠ AOB + m∠COD = 50°, calcular la medida del ángulo BOC

    A) 30° B) 40° C)50°
    D) 60° E) 70°

13. Un ángulo llano es dividido por 4 rayos de tal manera que se forman ángulos consecutivos cuyas medidas están en progresión aritmética. Calcular la medida del ángulo determinado por el primer y último rayo

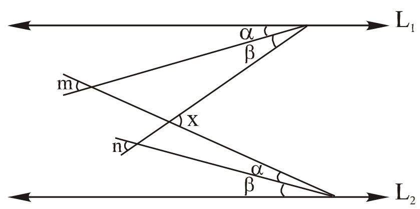
    A) 100° B)108° C)112°
    D) 120° E) 110°

14. Calcular "x", si:
    a + b + c =130° y $\alpha + \beta$ = 70°



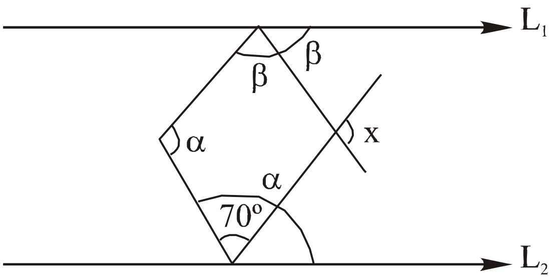
    A)20° B)30° C)40°
    D)50° E)60°

15. Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas y m es el complemento de n, Calcular "x".



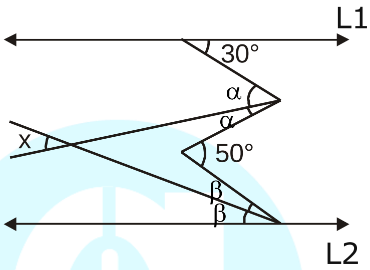
    A)15° B)30° C)20°
    D)40° E)60°

16. En la figura, L_1 // L_2, calcule “x”.



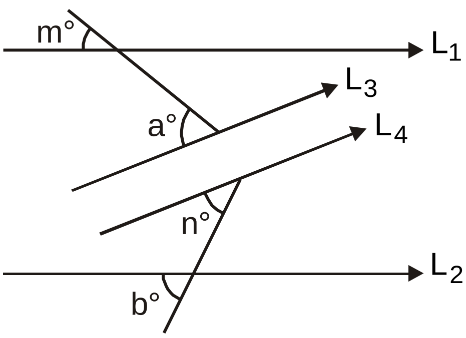
A)100° B)105° C)110°
D)115° E)120°

16. En el grafico L_1 // L_2, hallar “x”



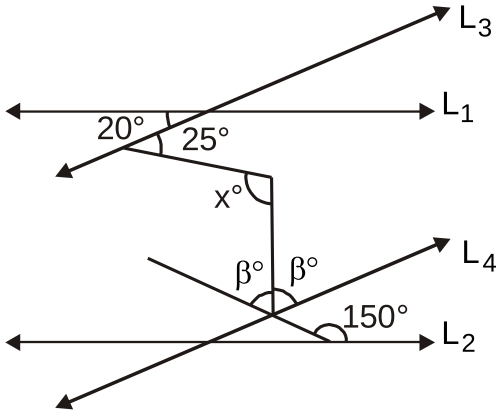
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

17. Calcular: a° – b° . Si m° – n° = 25°
L_1 // L_2 y L_3 // L_4



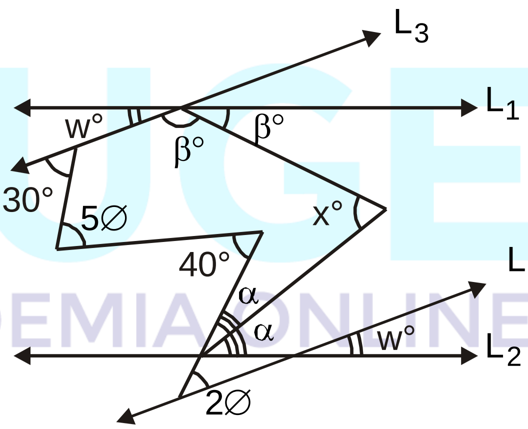
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

18. Según el gráfico. Hallar “x”. Si L_1 // L_2 y L_3 // L_4



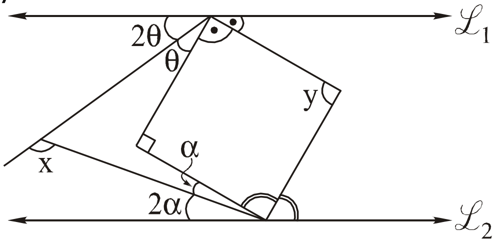
A) 60° B) 75° C) 90°
D) 100° E) 115°

19. Hallar el valor de “x”. Si L_1 // L_2 y L_3 // L_4



A) 60° B)70° C)80°
D) 90° E) 100°

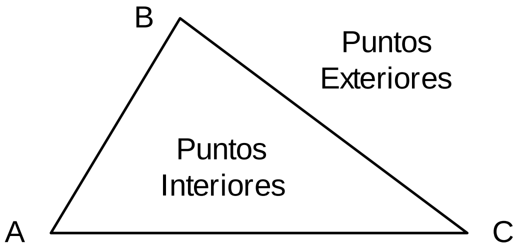
20. Siendo L_1 // L_2. Calcule: “x + y”



A) 90° B) 180° C) 270°
D) 255° E) 360°

TRIÁNGULOS I

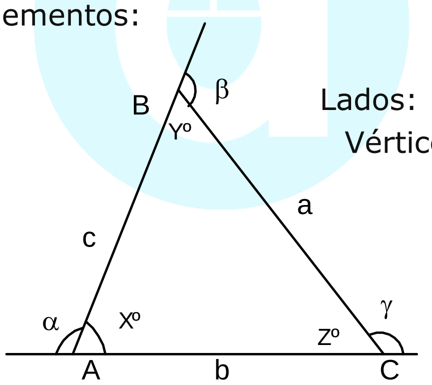
DEFINICIÓN: Se llama triángulo a la figura formada por 3 segmentos de recta que unen tres puntos no colineales.



NOTACIÓN. Un triángulo se denota por las tres letras mayúsculas que llevan sus vértices, denominándolo:

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA} \;/\; A \notin \overline{BC}$$

Elementos:



Lados: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$

Vértices: A, B, C

Angulos { Internos $\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$; Externos $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ }

Perímetro (2p): 2p = a + b + c

Semiperímetro (p) $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

NOTA 1. Las medidas de los lados del triángulo se designan por la letra minúscula del vértice opuesto a dicho lado.

BC = a , AC = b , AB = c

NOTA 2. Todo triángulo divide al plano en tres subconjuntos de puntos:

- Puntos interiores al triángulo
- Puntos exteriores al triángulo y
- Puntos del triángulo

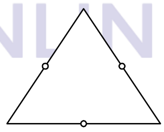
NOTA 3. Región Triangular es una figura formada por los puntos del triángulo y los puntos interiores al triángulo.

NOTA 4. Cuando se dice área del triángulo, se refiere al área de la región triangular.

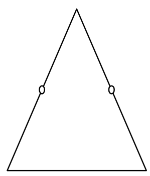
CLASIFICACION DE LOS TRIANGULOS

Atendiendo a sus lados

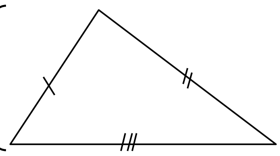
1) Equilátero



2) Isósceles

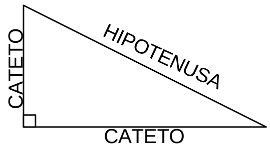


3) Escaleno



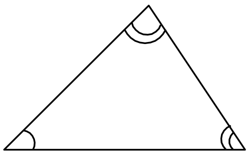
Atendiendo a sus ángulos

1) Rectángulo

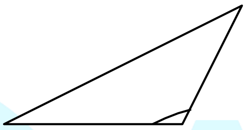


2) Oblicuángulos

Acutángulo. Sus tres ángulos son agudos.

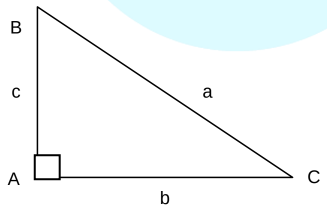


Obtusángulo: tiene un ángulo obtuso



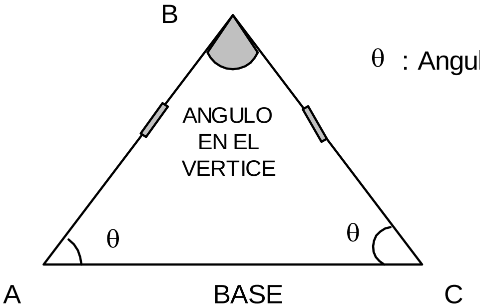
TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

NOTA 5. En todo triángulo isósceles, al lado desigual se le llama base y al ángulo que se opone a ella se le conoce como ángulo en el vértice o ángulo desigual. Los dos ángulos de la base.

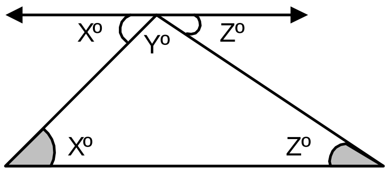


θ : Angulo de la Base

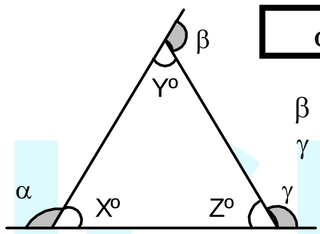
PROPIEDADES FUNDAMENTALES DEL TRIANGULO

1. La suma de las medidas de los ángulos internos es igual a 180º.

$$\boxed{X^o + Y^o + Z^o = 180^o}$$



2. La medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes a él.



$$\boxed{\alpha = Y^o + Z^o}$$

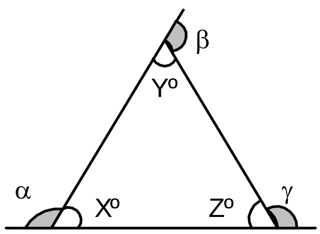
$\beta = X^o + Z^o$
$\gamma = X^o + Y^o$

Demostración:

1) $\alpha + X^o = 180^o$
2) $X^o + Y^o + Z^o = 180^o$
3) Igualando
$\alpha + X^o = X^o + Y^o + Z^o$

$\boxed{\alpha = Y^o + Z^o}$ L.q.q.d.

3. La suma de las medidas de los ángulos externos es igual a 360º.

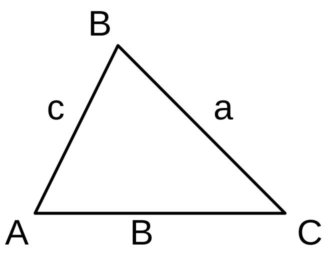


$\alpha + X^o = 180^o$
$\beta + Y^o = 180^o$
$\underline{\gamma + Z^o = 180^o}$

$\alpha + \beta + \gamma + 180^o = 540^o$

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 360^o}$$

4. TEOREMA DE LA EXISTENCIA DEL TRIANGULO. La medida de un lado es siempre menor que la suma de las medidas de los otros dos lados pero mayor que su diferencia.



$$\boxed{a - c < b < a + c}$$

Demostración

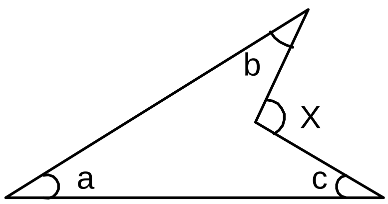
1) $b < a + c$ I
2) $a < b + c$
   $\underline{a - c < b}$ II
3) De I y II

$$\boxed{a - c < b < a + c}$$

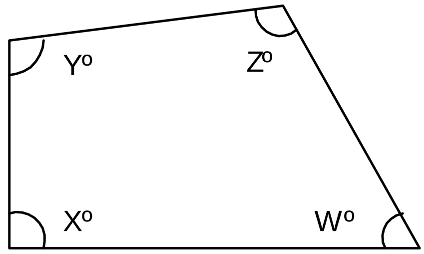
5. A mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa. A menor lado se opone menor ángulo y viceversa. A lados congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.

PROPIEDADES DEL CUADRILATERO

1) $\boxed{X = a + b + c}$



2) $X^o + Y^o + Z^o + W^o = 360^o$

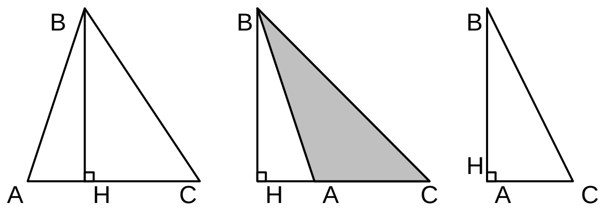


LINEAS NOTABLES Y PUNTOS NOTABLES

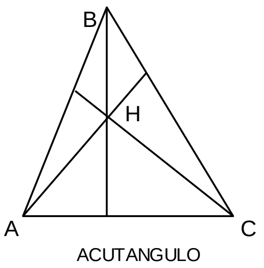
Las líneas notables son aquellas que cumplen funciones específicas en el triángulo, dichas líneas son: Altura, Mediana, Mediatriz, Bisectriz interior, Bisectriz exterior.

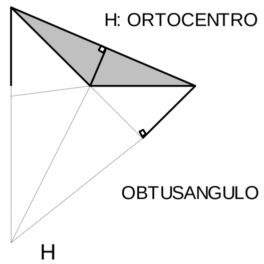
Puntos Notables son Ortocentro, Baricentro, Circuncentro, Incentro y Excentro

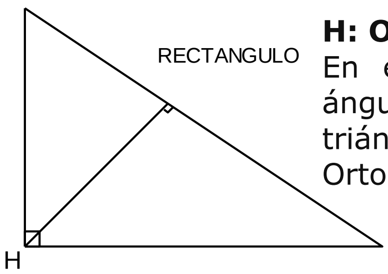
1. **ALTURA**. Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice del triángulo a la recta que contiene al lado opuesto. En cada una de las siguientes figuras, el segmento BH es una altura del triángulo ABC.



ORTOCENTRO. Es el punto de concurrencia de las alturas de un triángulo. El ortocentro es un punto que puede estar en el interior del triángulo, fuera de él o en el vértice del ángulo recto, según los triángulos sean Acutángulos, Obtusángulos y Rectángulos respectivamente. Este punto tiene la propiedad de dividir a cada altura en dos segmentos cuyo producto es una constante.

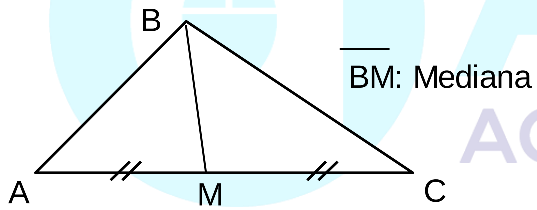






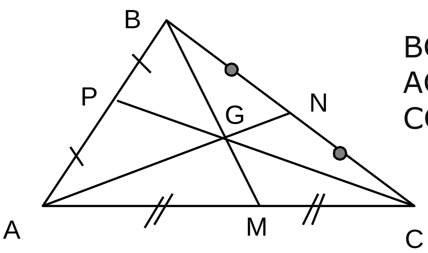
H: ORTOCENTRO
En el vértice de un ángulo recto de un triángulo se ubica el Ortocentro.

2) MEDIANA: Es un segmento que une un vértice y el punto medio del lado opuesto. En la figura M es el punto medio de AC, $\overline{BM}$ se llama mediana.



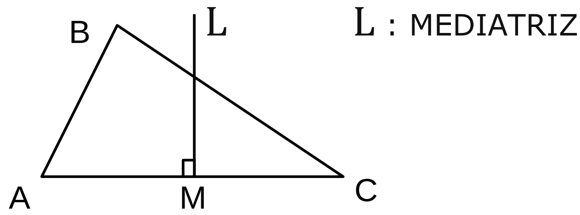
BARICENTRO (G): Llamado también centro de gravedad o gravicentro o centroide, es el punto de concurrencia de las tres medianas de un triángulo.

El Baricentro, siempre es un punto interior al triángulo, divide a cada mediana en dos segmentos que están en la relación de 1/3 y 2/3 de la mediana.



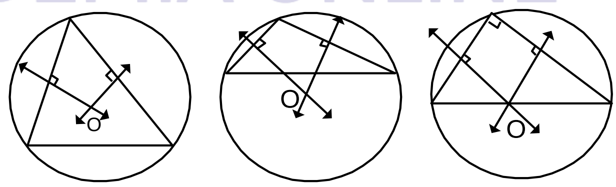
BG = 2 (GM)
AG = 2 (GN)
CG = 2 (GP)

3) MEDIATRIZ: Es una recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio, dicha recta se encuentra en el mismo plano que contiene al triángulo



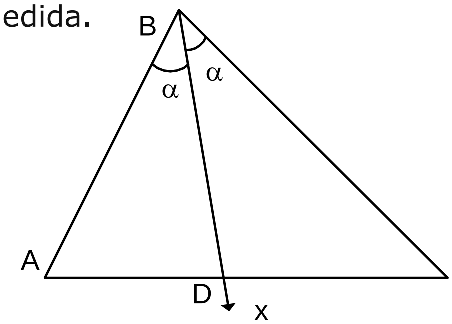
CIRCUNCENTRO (O): Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

El circuncentro es un punto que puede estar en el interior del triángulo, fuera de él o en el punto medio de la hipotenusa, según los triángulos sean Acutángulos, Obtusángulos y Rectángulos respectivamente. Este punto tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo (Circunferencia circunscrita, es la que pasa por los vértices del triángulo) y equidistan de sus vértices.



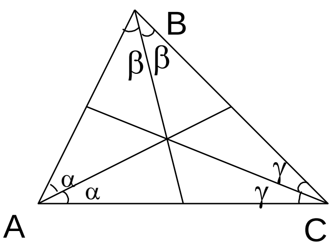
ACUTANGULO OBTUSANGULO RECTANGULO

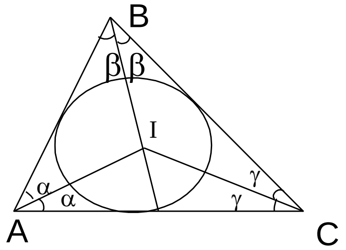
4) **BISECTRIZ INTERIOR**. Es el rayo que partiendo del vértice de un triángulo, divide al ángulo interior en 2 ángulos de igual medida.



$\overrightarrow{BX}$: Bisectriz Interior
$\overline{BD}$: Segmento de bisectriz interior.

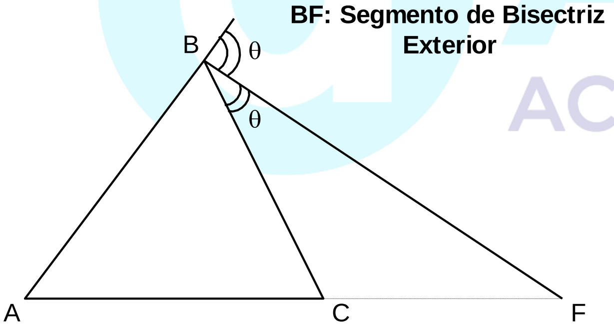
INCENTRO (I): Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores. El Incentro, siempre es un punto interior al triángulo. Este punto tiene la propiedad de ser al centro de la circunferencia inscrita al triángulo (circunferencia inscrita es la que toca a los lados del triángulo, interiormente en tres puntos) y equidistar de los 3 lados.



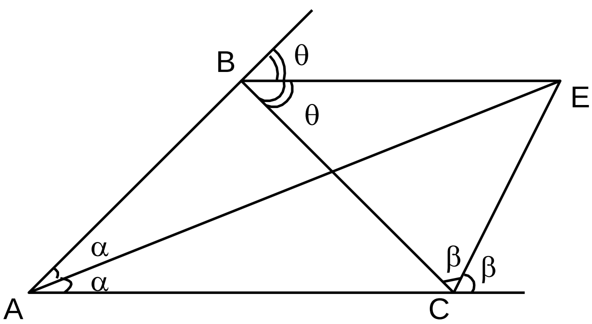


5) BISECTRIZ EXTERIOR: Es el rayo que partiendo del vértice de un triángulo, divide al ángulo exterior en 2 ángulos de igual medida.

BF: Segmento de Bisectriz Exterior



EXCENTRO (E): Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores, con la bisectriz interior del tercer ángulo del triángulo.

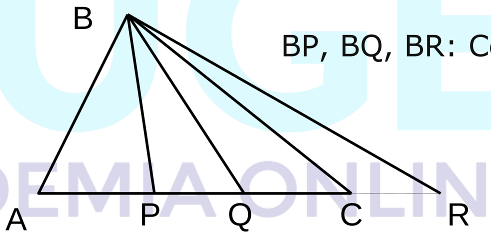


E: Excentro relativo al lado BC

El Excentro es siempre, un punto exterior al triángulo. Este punto tiene la propiedad de ser el centro de la circunferencia exinscrita al triángulo (circunferencia exinscrita es la que toca a un lado y a las prolongaciones de los otros dos lados en tres puntos respectivamente) y equidistar de un lado y de las prolongaciones de los otros dos.

Todo triángulo tiene 3 excentros, cada uno de ellos relativo a uno de los lados del triángulo.

* **CEVIANA**: Es el segmento que une un vértice de un triángulo con un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación. Desde un vértice se puede trazar infinitas cevianas. Por lo tanto las ceviana no es línea notable. El nombre de ceviana se debe en honor al matemático italiano CEVA en 1678.

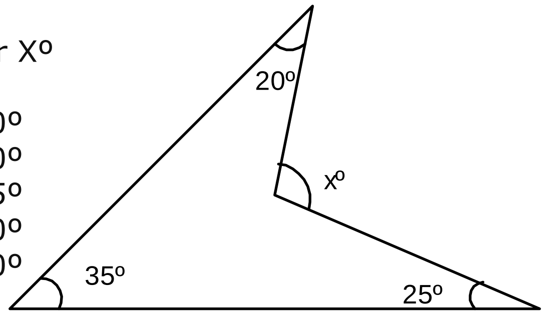


BP, BQ, BR: Cevianas

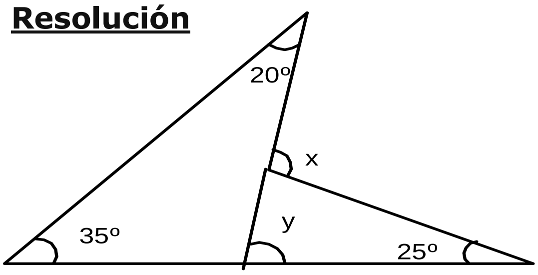
PROBLEMAS RESUELTOS

01. Hallar Xº

a) 50º
b) 60º
c) 65º
d) 70º
e) 80º



Resolución

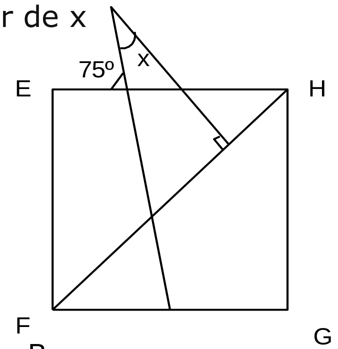


1) Por Angulo externo
$x = y + 25º$ .... (I)
$y = 35º + 20º$ .....(II)

2) (II) en (I)
$x = 35º + 20º + 25º$

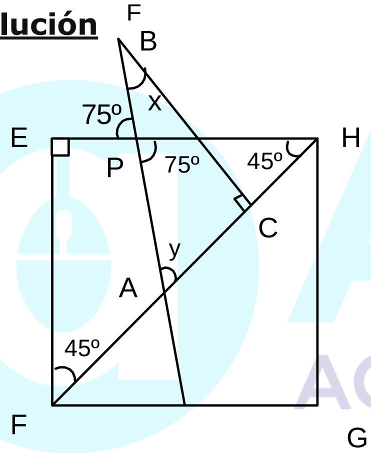
$\boxed{x = 80º}$ **Rpta. E**

02. En la figura, EFGH es un cuadrado. Hallar el valor de x



a) 60º
b) 45º
c) 50º
d) 30º
e) 20º

Resolución



1) En el triángulo PAH
$75º + 45º + y = 180º$
$y = 60º$ ..... (I)

2) En $\triangle$ ABC
$x + y = 90$ ...... (II)

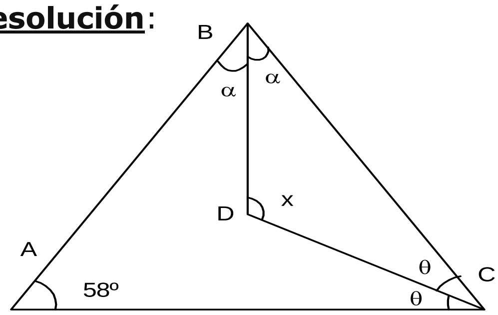
3) (I) en (II)
$x + 60º = 90º$

$\boxed{x = 30º}$ **Rpta. d**

03. En un triángulo ABC, el ángulo A mide 58º. ¿Cuánto mide el ángulo BDC donde D es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos B y C?

a) 125º b) 119º c) 110º
d) 95º e) 102º

Resolución:



Δ BDC $x + \alpha + \theta = 180º$
$\sphericalangle$ ABCD $x = \alpha + \theta + \hat{A}$

Suma $2x = 180º + \hat{A}$

Mitad: $\boxed{x = 90º + \hat{A}/2}$

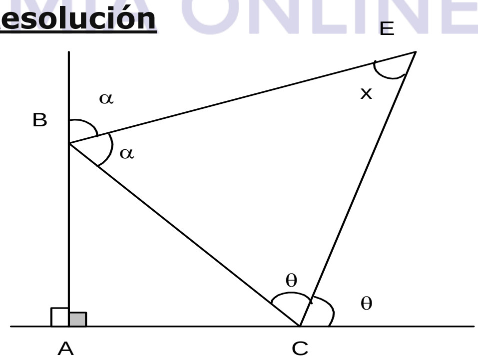
$x = 90º + 58º/2$

$\boxed{x = 119º}$ **Rpta. b**

04. Hallar el ángulo formado por la intersección de las bisectrices de los ángulos exteriores de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo

a) 60º b) 45º c) 30º
d) 65º e) 90º

Resolución



1) Suma de ángulos externos en Δ ABC
$90º + 2\alpha + 2\theta = 360º$
$\underline{2\alpha + 2\theta = 270º}$

Mitad $\alpha + \theta = 135$ ... (I)

2) En Δ BEC
$\alpha + \theta + x = 180$ .... (II)

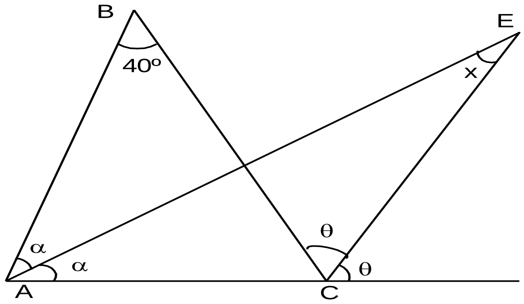
3) (I) en (II)
$135º + x = 180º$

$\boxed{x = 45º}$ **Rpta. b**

05. El ángulo B de un triángulo ABC mide 40º. ¿Cuánto mide el ángulo AEC donde E es el punto de intersección de las bisectrices del ángulo interior A y ángulo exterior C?

a) 10º b) 20º c) 30º
d) 40º e) 50º

Resolución



1) Por ángulo externo

Δ ABC $2\alpha + 40º = 2\theta$

Mitad $\alpha + 20º = 2\theta$ ...... (I)

Δ AEC $\alpha + x = \theta$ .... (II)

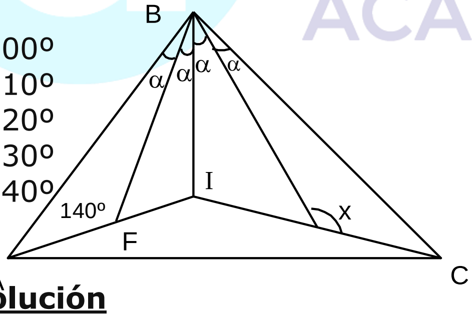
2) Igualando (II) y (I)

$\alpha + x = \alpha + 20º$

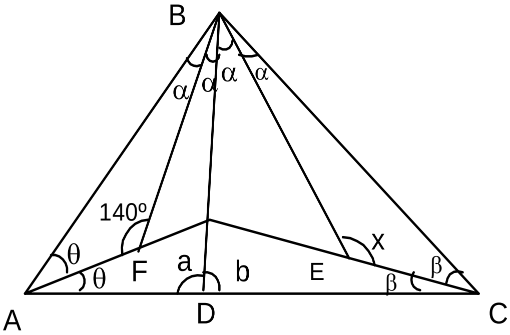
$\boxed{x = 20º}$ **Rpta. b**

06. Hallar X si: "I" es Incentro del triángulo ABC, m $\measuredangle$ AFB = 140º.

a) 100º
b) 110º
c) 120º
d) 130º
e) 140º



Resolución



1) Propiedad (Prob.4)

$140º = 90º + a/2$

$x = 90º + b/2$

Suma $140º + x = 180º + (a+b)/2$

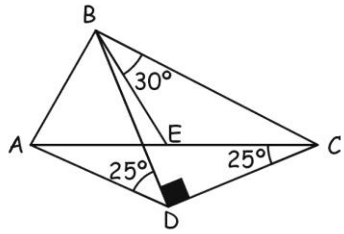
$140º + x = 180 + 90$

$140º + x = 270º$

$\boxed{x = 130º}$ **Rpta. d**

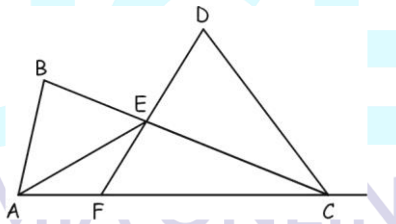
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. De la figura AB = BE; BD = DC; el triángulo ABD es:



A) Isósceles B) Equilátero
C) Acutángulo D) Rectángulo
E) Obtusángulo

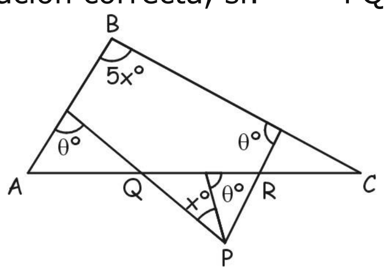
2. De la figura:AB = AE; AF = FE; FD = DC; EC = FC. Calcular: m$\measuredangle$BAC. Si: m$\measuredangle$FDC=40º



A) 45º B) 75º C) 65º

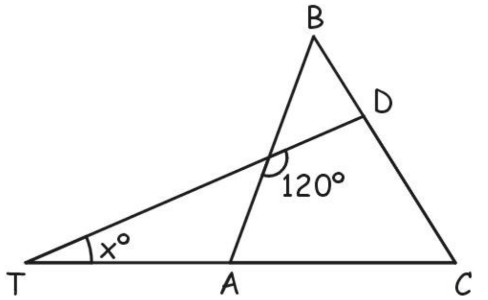
D) 55º E) 85º

3. Del gráfico adjunto determina la relación correcta, si: PQ= PR.



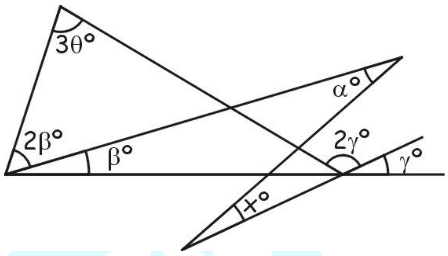
A) 3x = 2θ B)5x = 2θ
C) 7x = 3θ D) 4x = θ
E) 7x = 2θ

4. Calcular “x”, si AB = BC y TC = TD



A) 10º B) 15º C) 20º
D) 30º E) 40º

5. Calcular “x”, si: α - θ = 18°

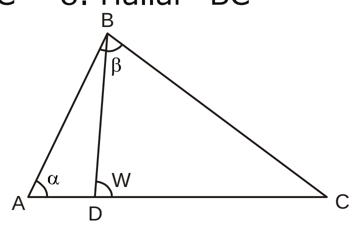


A) 16º B) 17º C) 18º
D) 19º E) 36º

6. En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, tal que m<BDA = 72º y m<BCD = 35º. Calcular la m<BAD.

A) 56º B) 63º C) 70º
D) 71º E) 77º

7. En la figura $W = \frac{\alpha+\beta}{2}$, AD = 3, AC = 8. Hallar “BC”



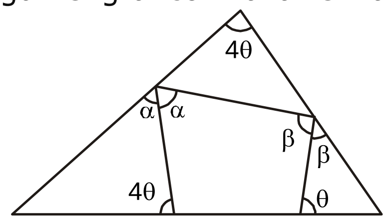
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

7. Se tiene un triangulo isósceles MNP; MN = NP, en el cual se traza la ceviana $\overline{PQ}$. Sobre $\overline{PQ}$ se toma el punto “R” tal que NQ = NR y la m∠RNP = 36°. Hallar la m∠MPQ
A) 18° B) 20° C)30°
D) 36° E) 45°

9. En un triangulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. En el triangulo BHC se traza la bisectriz interior $\overline{BR}$. Si AB = 10 y AH = 7. Hallar HR

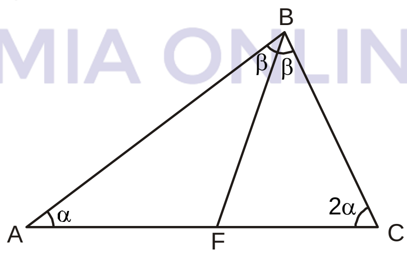
A) 2 B) 2,5 C) 3
D) 3,5 E) 4

10. Según el grafico. Hallar el valor de “θ”



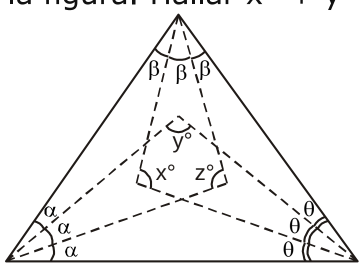
A) 10° B) 20° C)30°
D) 40° E) 50°

11. De la figura. Hallar “BC”, AB = 4 y FC = 2



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

12. De la figura. Hallar x° + y° + x°



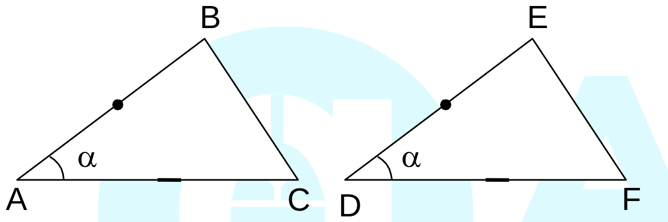
A) 200° B) 170° C) 300°
D) 330° E) 360°

TRIÁNGULOS II

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS
Dos triángulos son congruentes, si tienen todos sus elementos (lados y ángulos) respectivamente congruentes.

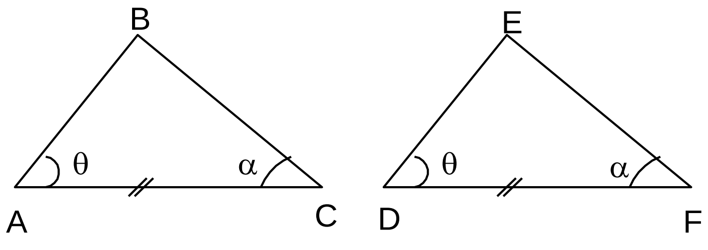
Para que dos triángulos sean congruentes es necesario que cumplan con uno de los siguientes casos generales:

1º Caso (L.A.L.): Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y congruente el ángulo comprendido entre dichos lados.



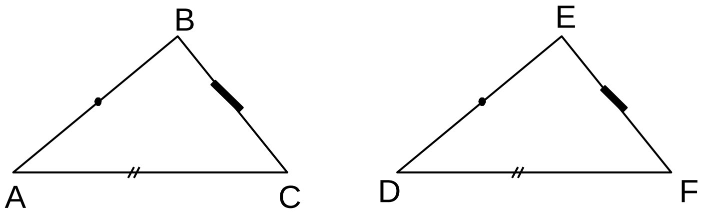
$\triangle$ABC ≅ $\triangle$ DEF

2º Caso (A.L.A.): Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes y congruente el lado comprendido entre dichos ángulos.



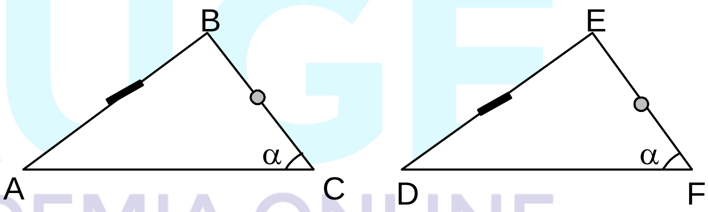
$\triangle$ABC ≅ $\triangle$ DEF

3º Caso: (L.L.L.): Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente congruentes.



$\triangle$ABC ≅ $\triangle$ DEF

4º Caso: (L.L.A.): Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y congruente el ángulo que se opone al mayor de dichos lados.



$\triangle$ABC ≅ $\triangle$ DEF

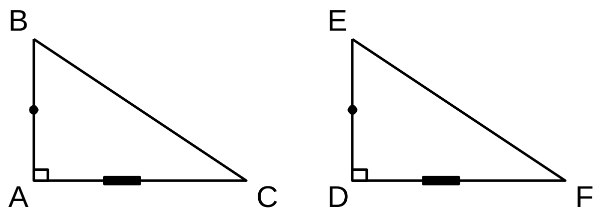
OBSERVACIONES:

1. Una sola expresión $\triangle$ABC ≅ DEF nos dice a la vez seis cosas, a saber:
   $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
   $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$, $\hat{C} \cong \hat{F}$
2. Si dos triángulos son congruentes, son respectivamente congruentes sus seis elementos; y a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y recíprocamente.
3. Algunos autores no consideran el 4º Caso LLA (Lado, Lado, Angulo), mencionan solamente los tres primeros casos.

CONGRUENCIA DE TRIANGULOS RECTANGULOS

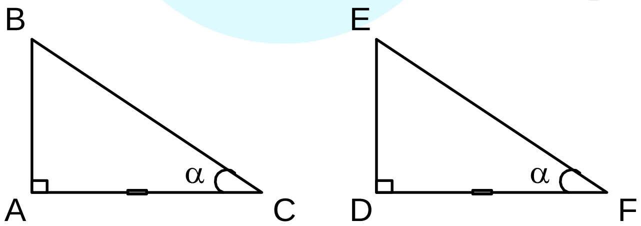
Están comprendidos en los casos de congruencia ya estudiados, teniendo presente que necesitan sólo de 2 condiciones porque tienen el ángulo recto como ángulo conocido.

1º Caso (C-C) (Cateto, Cateto) LAL
Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen sus catetos respectivamente congruentes.



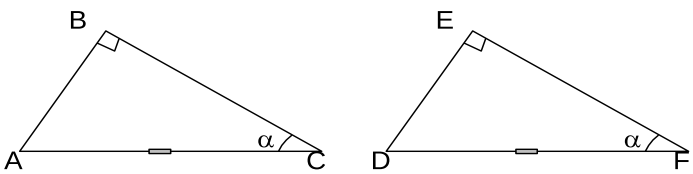
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

2º Caso (C-A) (Cateto, Angulo) ALA
Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen un cateto y un ángulo agudo respectivamente congruentes.



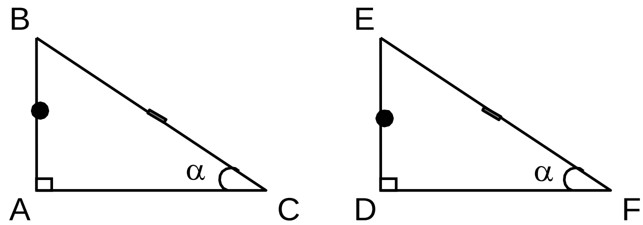
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

3º Caso (H - A) (Hipotenusa, Angulo) Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruentes.



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

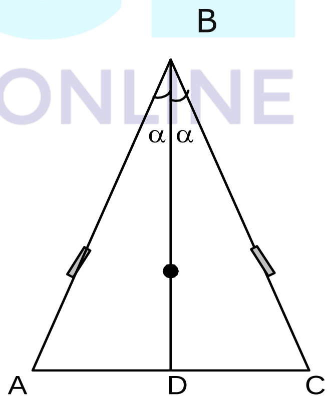
4º Caso (H- C) (Hipotenusa, Cateto)
Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente congruentes. (Caso LLA).



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

TEOREMA DEL TRIANGULO ISOSCELES
En todo triángulo isósceles, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes.

THALES DE MILETO (600 A.C.) Uno de los 7 sabio de la antigua GRECIA, demostró que la medida de los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.



Si: AB = BC
Entonces

$\hat{A} \cong \hat{C}$

Demostración:
1) Trazamos la bisectriz BD.
2) Δ ABD ≅ Δ DBC
por el caso LAL.

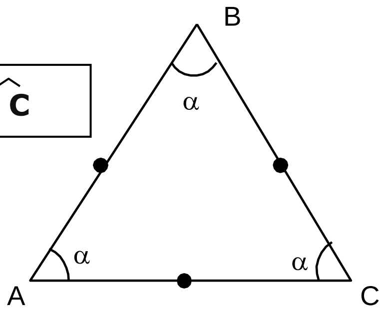
$\boxed{\widehat{A} \cong \widehat{C}}$ **L.q.q.d.**

NOTA: En el 2º CASO de congruencia de triángulos rectángulos, el ángulo agudo puede ser adyacente al cateto o puede ser opuesto al cateto.

TEOREMA DEL TRIANGULO EQUILATERO

En todo triángulo equilátero, sus tres ángulos internos son congruentes.

$\boxed{\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}}$

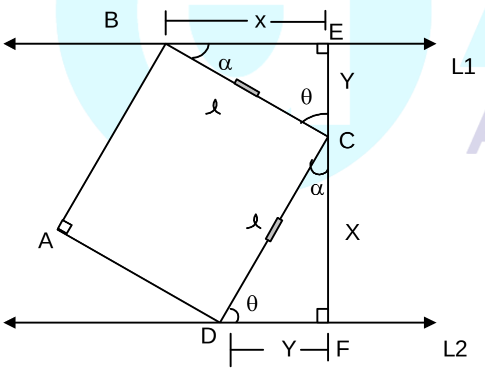


Demostración:

1) Por teorema del isósceles.
$\hat{A} \cong \hat{B}$ y $\hat{B} \cong \hat{C}$
2) Transitividad de congruencia de ángulos.

$\boxed{\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}}$ **L.q.q.d.**

PROPIEDAD: ABCD es un cuadrado, L1//L2

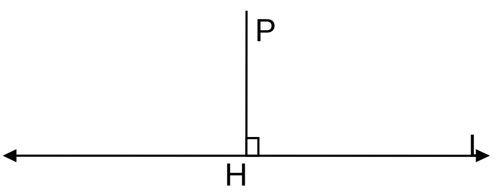


$\boxed{\ell^2 = x^2 + y^2}$

$\boxed{FE = x + y}$

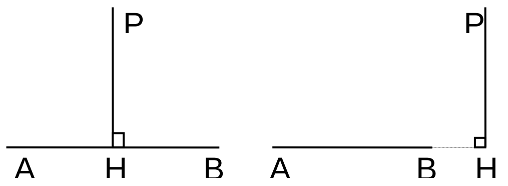
DISTANCIA DE UN PUNTO

La distancia de un punto a una recta, es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta.



- La medida de PH es la distancia de P a la recta L.
- Al punto "H" se le denomina pie de la perpendicular.

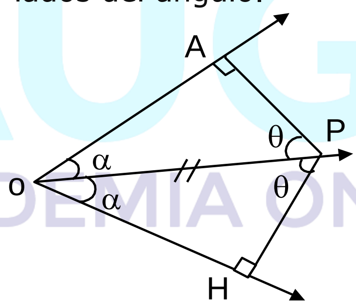
La distancia de un punto a un segmento, es también la longitud del segmento perpendicular desde el punto al segmento o a la prolongación de dicho segmento. Es decir perpendicular a la recta que contiene el segmento.



APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA DE TRIANGULOS.

1º TEOREMA DE LA BISETRIZ DE UN ANGULO.

Todo punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.



$\boxed{PA = PB}$

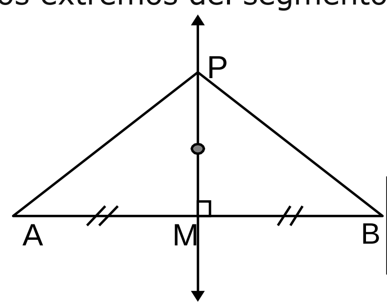
Demostración:

Caso H-A: OAP ≅ OBP

$\boxed{PA = PB}$ L.q.q.d.

2º TEOREMA DE LA MEDIATRIZ

Todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento dado.



$\boxed{PA = PB}$

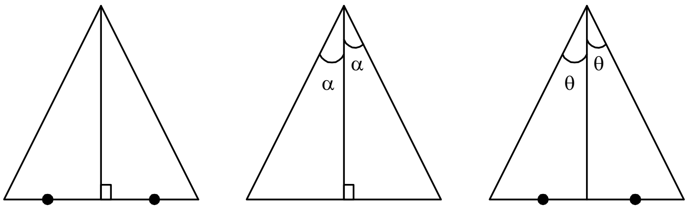
Demostración:

Caso LAL △ PMA ≅ △ PMB

$\boxed{PA = PB}$ **L.q.q.d.**

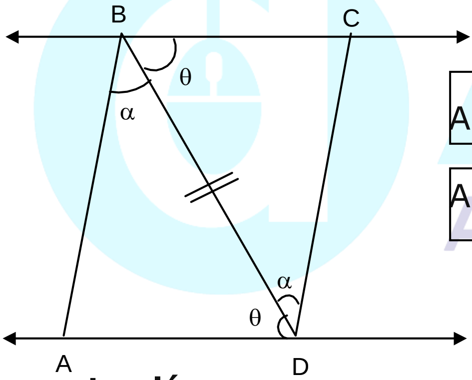
NOTA:

Si dos líneas notables coinciden en un triángulo, entonces dicho triángulo es isósceles.
Ejemplo: Los siguientes triángulos son isósceles.



3º TEOREMA:

Los segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son congruentes.



$\boxed{AB = CD}$

$\boxed{AD = BC}$

Demostración:

Sean AB y CD dos segmentos paralelos comprendidos entre las paralelas BC y AD. Trazando el segmento BD quedan formados dos triángulos congruentes ABD y BCD (Caso ALA), por lo tanto:

$\boxed{AB = CD}$ $\boxed{AD = BC}$ **L.q.q.d.**

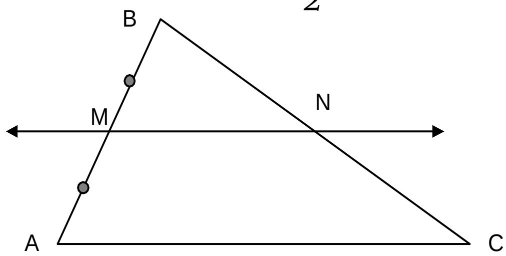
4º TEOREMA DE LOS PUNTOS MEDIOS

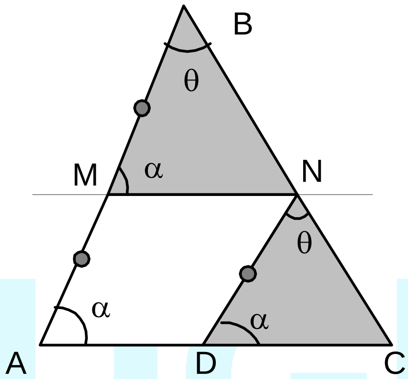
Si por el punto medio de un lado de un triángulo se traza una recta paralela a otro lado, dicha paralela divide al tercer lado del triángulo en dos segmentos congruentes. El segmento determinado por los puntos medios de dos lados del triángulo mide la mitad del tercer lado.

Hipótesis:
- M punto medio de AB (AM = MB)
- La recta MN es paralelo al lado AC.

Tesis:

BN = NC, $MN = \dfrac{AC}{2}$





Demostración:

1) Tracemos ND//AB
Entonces:
AMND es un paralelogramo
AM = ND AD = $\boxed{MN}$ (I)

2) △ MBN ≅ △ DNC (ALA)
BN = NC $\boxed{DC = MN}$ (II)

3) AD + DC = AC (III)

4) I y II en III

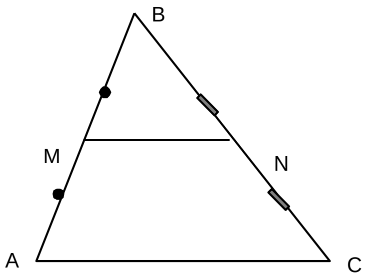
MN + MN = AC⇒ $\boxed{MN = \dfrac{AC}{2}}$ L.q.q.d.

5º TEOREMA

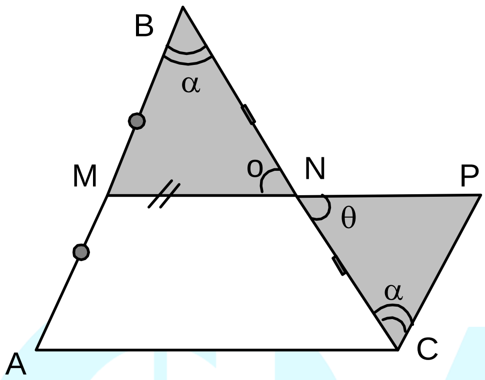
El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de su longitud.

Hipótesis:

Sea el triángulo ABC
M punto medio de AB
N punto medio de BC



Tesis:
MN//AC
MN = AC/2
Demostración.

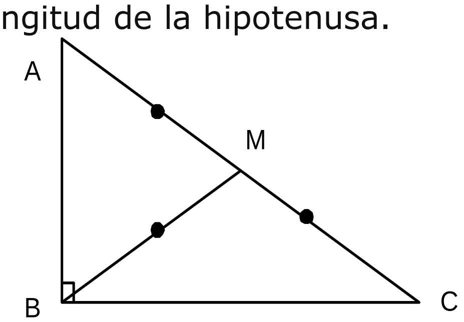


1) Prolongamos MN hasta P tal que MN= NP
2) △ MBN ≅ △ NCP (caso LAL)
$m\hat{B} = m\widehat{NCP}$ y MB = PC
3) AMPC es un paralelogramo.
MN//AC

2(MN) = MP=AC ⇒ $\boxed{MN = \frac{AC}{2}}$ L.q.q.d.

6º TEOREMA DE LA MENOR MEDIANA EN EL TRIANGULO RECTANGULO.

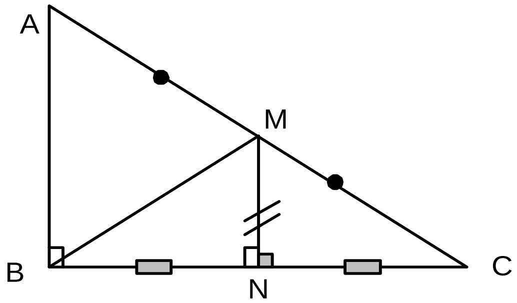
La mediana relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide la mitad de la longitud de la hipotenusa.



Hipótesis:
∆ ABC
$m\widehat{ABC} = 90º$
BM = Mediana

Tesis:
BM = AC/2

Demostración:



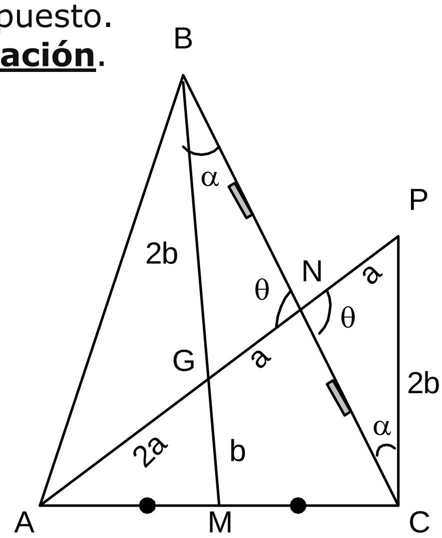
1) Por el punto M tracemos MN//AB
2) BN = NC (Teorema de los puntos medios)
3) △ MNB ≅ △ MNC (Caso LAL)

BM = MC → $\boxed{BM = AC/2}$

7º PROPIEDAD DE LAS MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO.

Las medianas de un triángulo concurren en un punto que dista de cada vértice el doble de la distancia al punto medio del lado opuesto.

Demostración.



1) Prolongar AN hasta P tal que CP//BM

2) △ BGN ≅ △ NPC (caso ALA)

GN = NP = a, $\boxed{BG = PC}$ ..(I)

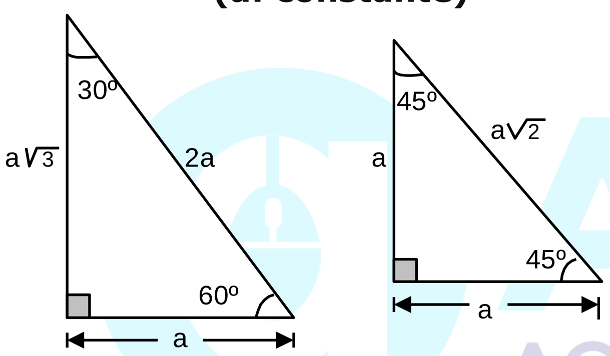
3) Teorema de los Puntos Medios
AG = GP = 2a

$GM = \frac{PC}{2} = b$ $\boxed{\Rightarrow \quad PC}$ = 2b ...(II)

4) $\boxed{BG = PC = 2b}$ L.q.q.d.

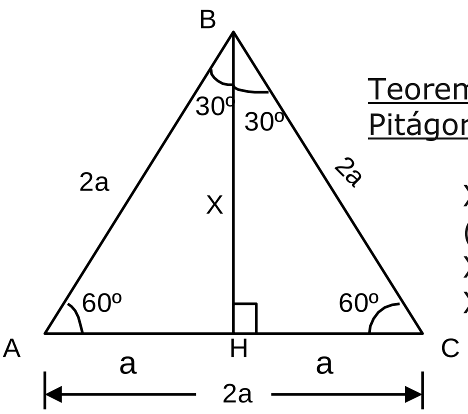
TRIÁNGULOS NOTABLES

(a: constante)



TRIÁNGULO DE 30º Y 60º

En un triángulo equilátero ABC de lado 2a, trazamos la altura BH y observamos que AH = HC = a



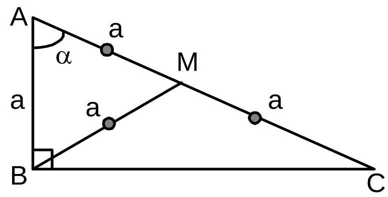
Teorema de Pitágoras.

$X^2 + a^2 = (2a)^2$
$X^2 + a^2 = 4a^2$
$X^2 = 3a^2$
$\boxed{X = a\sqrt{3}}$

En el ◺ BHC (30º y 60º) el cateto adyacente a 60º mide la mitad de la hipotenusa.

TEOREMA 1

Si un cateto mide la mitad de la hipotenusa, entonces el ángulo agudo adyacente a dicho cateto mide 60º.



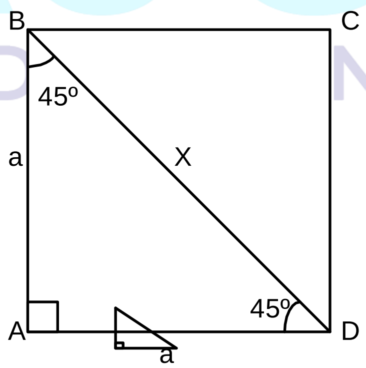
$\boxed{\alpha = 60º}$

Demostración:
1) Trazar la mediana BM
2) ∆ ABM Equilátero

$\boxed{\alpha = 60º}$ L.q.q.d.

TRIÁNGULO RECTANGULO ISOSCELES

En un cuadrado ABCD de lado, a, trazamos la diagonal BD, observamos que el triángulo BAD es isósceles.



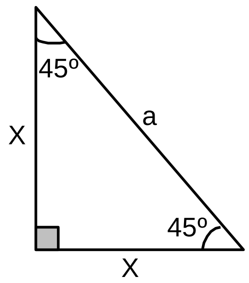
Pitágoras
$X^2 = a^2 + a^2$
$X^2 = 2a^2$

$\boxed{X = a\sqrt{2}}$

En el BAD (45º) la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces el largo de un cateto.

TEOREMA 2

En un triángulo rectángulo isósceles, el cateto es $\sqrt{2}/2$ veces el largo de la hipotenusa.



Demostración

Pitágoras

$x^2 + x^2 = a^2$

$2x^2 = a^2$

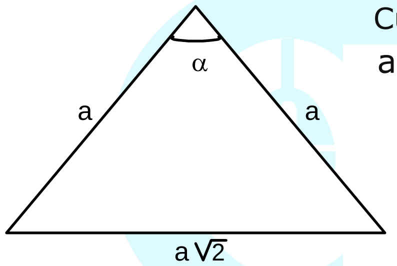
$4x^2 = 2a^2$

$2x = a\sqrt{2}$

$$\boxed{x = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

TEOREMA 3

Si la base de un triángulo isósceles es $\sqrt{2}$ veces el largo de cada uno de los dos lados congruentes, entonces el ángulo opuesto a la base es un ángulo recto.



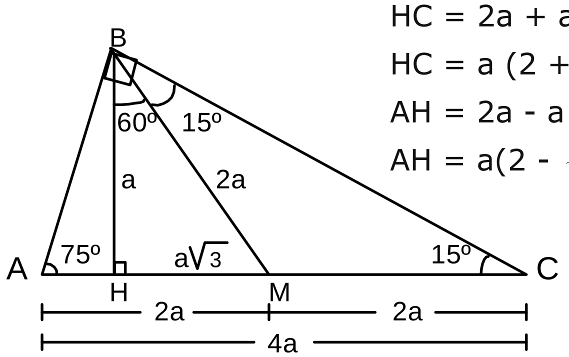
Cumple Pitágoras

$a^2 + a^2 = (a\sqrt{2})^2$

$$\boxed{\alpha = 90º}$$

TEOREMA 4

La altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo de 15º y 75º mide la cuarta parte de la hipotenusa.



$HC = 2a + a\sqrt{3}$

$HC = a(2 + \sqrt{3})$

$AH = 2a - a\sqrt{3}$

$AH = a(2 - \sqrt{3})$

Demostración:

1) Trazamos la mediana BM

$BM = \dfrac{AC}{2}$ .... (I)

2) △ BHM (30º y 60º)

$BH = \dfrac{BM}{2}$ .... (II)

3) I en II

$BH = \dfrac{AC}{4}$

EJERCICIOS

1. En un triángulo ABC la medida del ángulo exterior en el vértice A es el triple de la medida del ángulo C, además la mediatriz $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en P. Calcular BP, si BC – AB = 9.

A) 3 B) 6 C) 9
D) 4 E) 5

2. Él triángulo ABC es isósceles, AB=BC y la altura trazada desde C mide 10. si P es un punto cualquiera del lado $\overline{AC}$, calcular la suma de las distancias de P a los lados congruentes.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) 15

3. En un triángulo ABC, m< A=105º, m<C=25º y AB = 6. Si la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en P, calcular PC.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

4. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se sabe que AC=10 y m<C=26,5º. calcular la medida de la altura BH.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

5. En un triángulo rectángulo, la bisectriz interior del ángulo agudo mayor y la mediatriz de la hipotenusa se intersecan en un punto sobre el cateto mayor. Calcular la medida de uno de los ángulos agudos.

A) 75º B) 60º C) 53º
D) 45º E) 37º

6. En un triángulo ABC, AB=6 y AC=9. Por B se traza $\overline{BP}$ perpendicular a la bisectriz interior $\overline{AF}$. Si N es el punto medio de $\overline{BC}$, calcular PN.

A) 2,5 B) 1 C) 3,5
D) 2 E) 1,5

7. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$ tal que la m<ABM=50º y m<MBC=65º. Si AB=18, calcular BM.
A) 6 B) 8 C) 9
D) 12 E) $6\sqrt{3}$

8. En un triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que: AC = QC, m∠ABC = 50°; m∠BAC = 70°; m∠ACP = 55°; calcule la m∠QPC.

A) 15° B) 30° C)37°
d) 45° e) 53°

9. ABC es un triángulo obtusángulo, obtuso en A, se traza la bisectriz interior BD, si m∠BAC = 2m∠ADB, AB = a y CD = b. Calcular BC.

A) a+b B) 2a+b C) a-b
D) a+2b E) 2a+2b

10. ABC es un triángulo rectángulo, recto en B, en la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica el punto P y en el exterior relativo a $\overline{AC}$ se ubica el punto Q, tal que $\overline{BP} \perp \overline{PQ}$, si AC = AP + PQ y m∠BAC = 2m∠PQA. Calcular la m∠ACQ
A) 30° B) 37° C)45°
D) 60° E) 75°

11. ABC es un triángulo rectángulo, recto en B, en él se trazan; la altura BH y la ceviana interior $\overline{BE}$, tal que AB = BE = 8, en el interior del triángulo BEC se ubica el punto P, tal que m∠EPC = 90° y m∠ECP = m∠PCB, si BC – CE = 6. Calcular PH
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

12. Dado un triángulo rectángulo ABC tal que AB = BC, interiormente se ubica el punto P, si: BP = 3, PC = 7, m∠BPC = 90; calcule AP.
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

13. Dado un triángulo ABC en la cual la bisectriz interior $\overline{AE}$ y la altura $\overline{BH}$ se intersecan en P. Tal que m∠PCH = 15° y en $\overline{AH}$ se ubica el punto Q, si $\overline{QP} \perp \overline{PC}$; QC = 2(BP), calcule la m∠ABP.

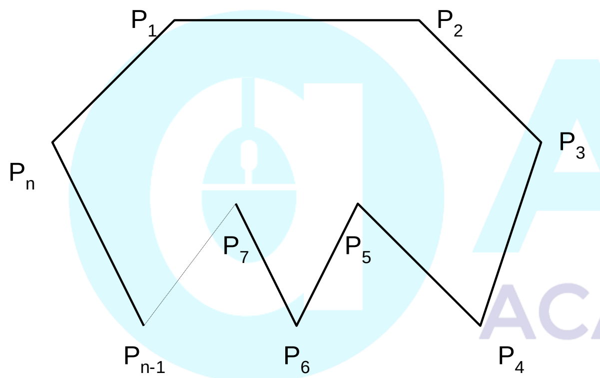
A) 15° B) 30° C)45°
d) 53° e) 60°

14. Se tiene un triángulo ABC en la cual se traza la mediana $\overline{CM}$ y la ceviana $\overline{AN}$ las cuales se intersecan en T, tal que MT = TC y TN = 5u, calcule AT.
A) 10 B) 15 C) 20
D) 7,5 E) 10

POLÍGONOS Y CUADRILÁTEROS

DEFINICIÓN:
Sean P_1, P_2, P_3, P_4,...... P_{n-1}, P_n puntos distintos en el plano y no colineales con n>2. La unión de los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$, recibe el nombre de POLÍGONO, si los segmentos tienen las siguientes propiedades:

- Dos segmentos con un punto común no deben ser colineales.
- Dos segmentos cualesquiera sólo pueden interceptarse en sus extremos.



En la figura, la parte punteada indica otros posibles puntos y segmentos puesto que n es un número natural cualesquiera igual o mayor que 3.

ELEMENTOS DEL POLÍGONO

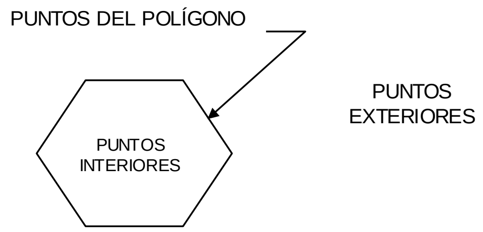
- Los puntos P_1, P_2,.......,P_n se llaman verticales del polígono.
- Los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}}$, $\overline{P_nP_1}$, son los lados del polígono.
- Dos segmentos con un vértice común determinan un ángulo al cual llamaremos ángulo interno del polígono.
- Un ángulo es ángulo externo de un polígono si y solo si forma un par lineal adyacente con uno de los ángulos internos del polígono.
- Un segmento que une dos vértices no consecutivos lo denominaremos diagonal del polígono.
- Un segmento que une los puntos medios de dos lados cualesquiera, lo llamaremos diagonal media del polígono.

OBSERVACIÓN: En un polígono de n lados existen n vértices, n ángulos internos.

NOTA 1:
Todo polígono divide al plano en tres subconjuntos de puntos:

- Puntos interiores al polígono.
- Puntos exteriores al polígono
- Puntos que pertenecen al polígono.

Un punto está en el interior de un polígono si está en el interior de cada uno de los ángulos internos del polígono, y está en el exterior, si no está ni en el interior ni en el polígono.



NOTA 2.

El perímetro del polígono es igual a la suma de todos sus lados.

NOTA 3.

Región poligonal es una figura formada por los puntos del polígono y los puntos interiores al polígono.

CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS

Los polígonos se clasifican en:

a) Por el número de lados

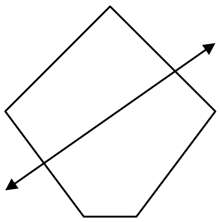
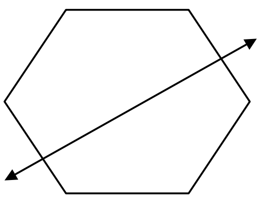
Triángulo	3 lados
Cuadrilátero	4 lados
Pentágono	5 lados
Hexágono	6 lados
Heptágono	7 lados
Octágono	8 lados
Nonágono o Eneágono	9 lados
Decágono	10 lados
Endecágono o Undecagono	11 lados
Dodecágono	12 lados
Pentadecágono	15 lados
Icoságono	20 lados

Los polígonos restantes se llaman según su número de lados. Por ejemplo: polígono de 14 lados, polígono de 25 lados, etc.

b) Por su forma

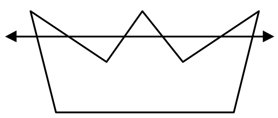
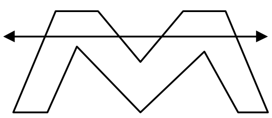
1. Polígono Convexo:
Es interceptado en sólo dos puntos

por una recta secante.

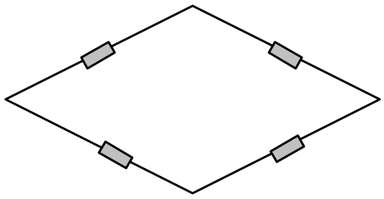
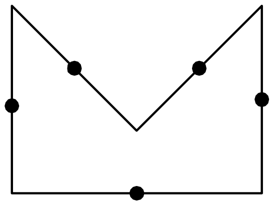
2. Polígono no Convexo
Es interceptado en más de dos

puntos por una recta secante.

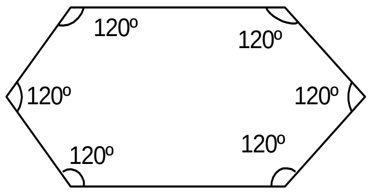



3. Polígono Equilátero:
Es aquel polígono cuyos lados son

todos congruentes.Ejemplo:

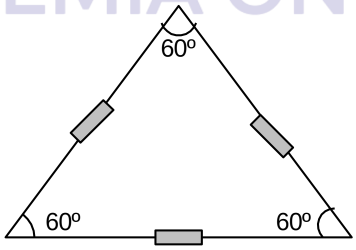
4. Polígono Equiángulo
Es aquel polígono cuyos ángulos internos son todos congruentes

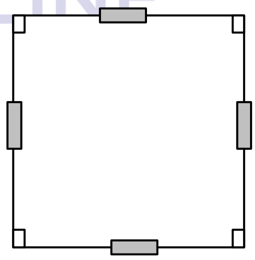



5. Polígono Regular
Es aquel polígono que es a la vez

equiángulo y equilátero.

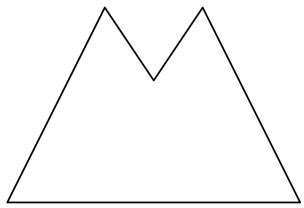
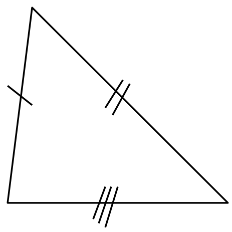
Ejemplo:





6. **Polígono No Regular (Irregular)**

Es aquel polígono que no cumple las condiciones del polígono regular.

FÓRMULAS GENERALES EN UN POLÍGONO DE N LADOS.

d: Números de diagonales que se pueden trazar desde un vértice.

$$d = N-3$$

D : Número total de diagonales que se pueden trazar.

$$D = \frac{N(N-3)}{2}$$

Z : Número de diagonales que se pueden trazar desde "V" vértices consecutivos.

$$Z : V \times N - \frac{(V+1)(V+2)}{2}$$

Si : Suma de las medidas de los ángulos internos

$$Si = 180^\circ (N-2)$$

Se: Suma de las medidas de los ángulos externos

$$Se = 360^\circ$$

FORMULAS PARA POLÍGONOS REGULARES DE N LADOS

i : Medida de un ángulo interno

$$i = \frac{180^\circ(N-2)}{N}$$

e: Medida de un ángulo externo

$$e = \frac{360^\circ}{N}$$

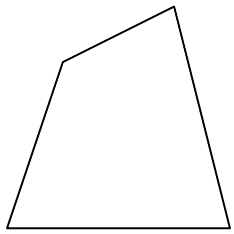
c : Medida de un ángulo central

$$c = \frac{360^\circ}{N}$$

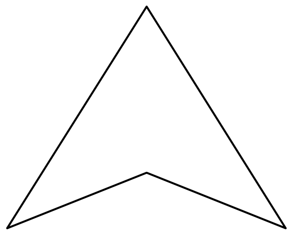
CUADRILÁTERO

Se llama cuadrilátero, al polígono de 4 lados.

Considerando la medida de sus ángulos internos pueden ser convexo o cóncavo.

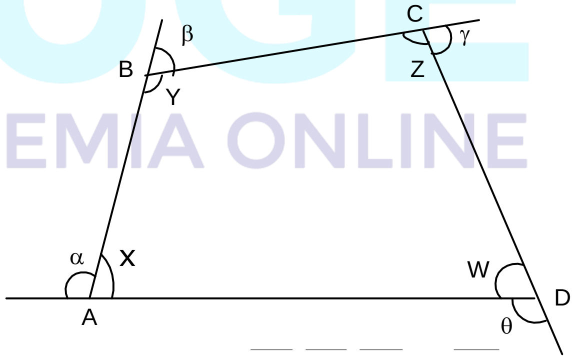


CONVEXO



CÓNCAVO

Elementos:



1) Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA}$
2) Vértices: A, B, C y D
3) Angulos Interiores: X, Y, Z, W
4) Angulos Exteriores: α, β, γ, θ.

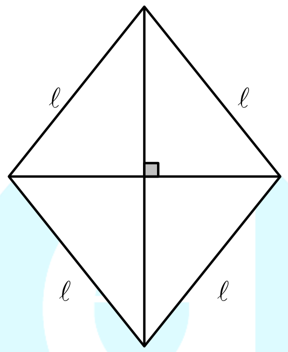
Nota 1.
En todo cuadrilátero, la suma de las medidas de sus ángulos es 360º.

CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Atendiendo al paralelismo de sus lados, se clasifican en tres: Paralelogramos, Trapecios y Trapezoides.

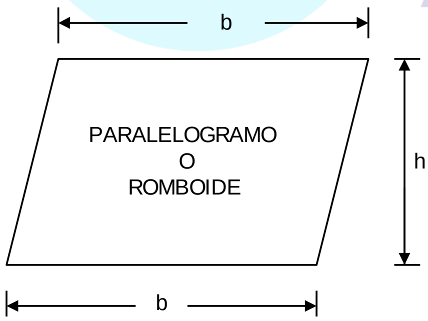
A) PARALELOGRAMOS.
Son aquellos que tienen sus lados opuestos paralelos. Se clasifican en:

A1. ROMBO. Llamado también **Losange**. Es un paralelogramo que tiene sus 4 lados congruentes.

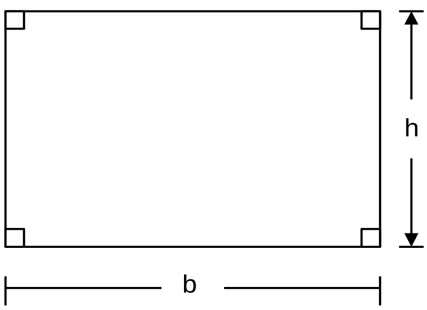


Rombo o Losange

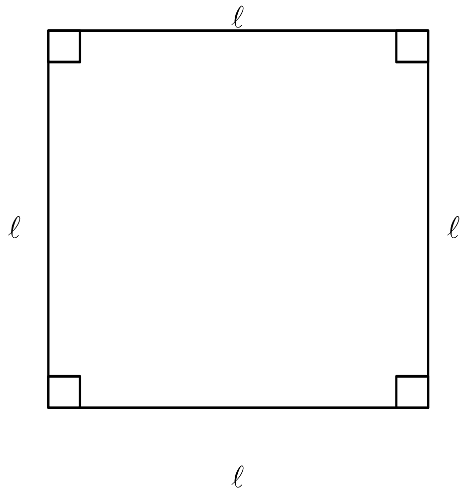
A2. Romboide. Es un paralelogramo.



A.3 Rectángulo. Llamado también **Cuadrilongo.** Es un paralelogramo que tiene sus 4 ángulos rectos



A.4 Cuadrado. Es un paralelogramo que tiene sus 4 ángulos rectos y sus 4 lados congruentes. (Polígono Regular de 4 lados).



Nota 2.
Cuando en un problema se menciona paralelogramo, se dibuja como un romboide.

Nota 3
El Cuadrado es un rombo y también es rectángulo.

Nota 4
De todos los rectángulos de igual perímetro, el que tiene más área es aquel cuya diferencia de lados es menor. Por lo tanto el que tiene área máxima es el cuadrado.

PROPIEDADES DEL PARALELOGRAMO

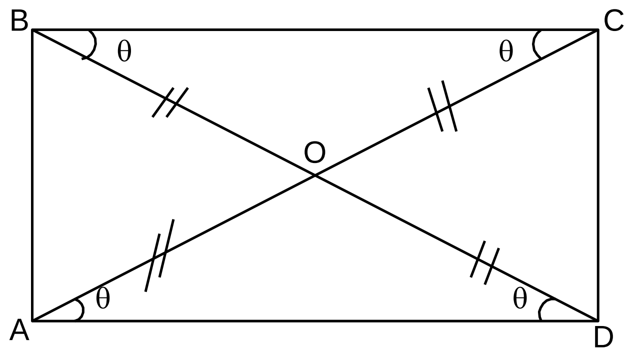
1. En todo paralelogramo, los lados opuestos son congruentes.

2. En todo paralelogramo, los ángulos opuestos miden iguales y los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.

3. En todo paralelogramo las diagonales se bisecan mutuamente. (**bisecan**: se cortan en su punto medio).

4. Las diagonales de un rectángulo son congruentes (miden igual).

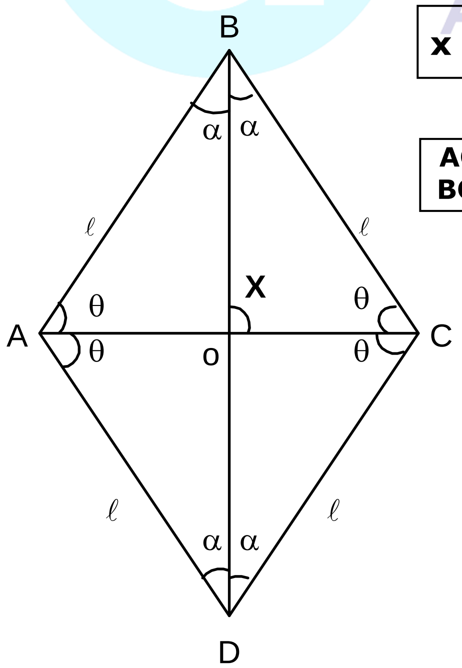
5. Las diagonales de un rectángulo se interceptan en su punto medio, determinando 4 segmentos de igual longitud.



$$\boxed{OA = OB = OC = OD}$$

6. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre si y bisectrices de sus ángulos.

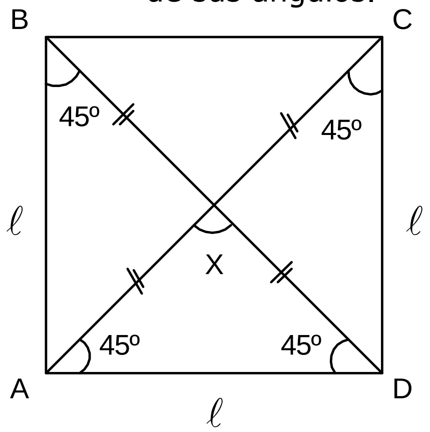
BD : Diagonal mayor
AC : Diagonal menor



$\boxed{x = 90º}$

$\boxed{\begin{array}{c} AO = OC \\ BO = OD \end{array}}$

7. Las diagonales de un cuadrado son congruentes, perpendiculares y bisectrices de sus ángulos.

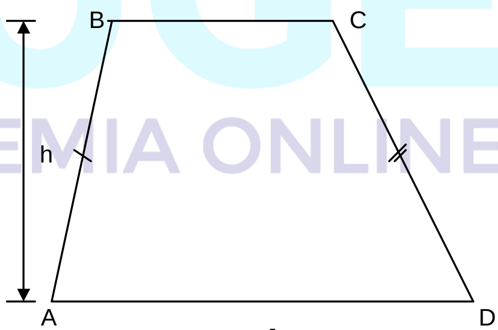


$\boxed{X = 90º}$

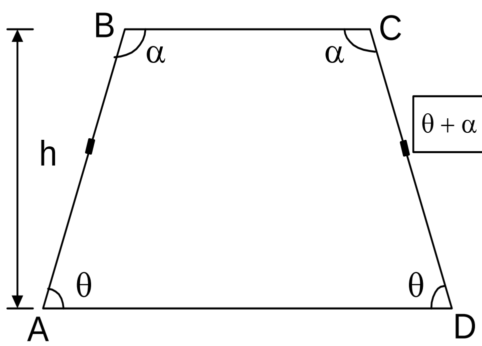
$\boxed{AC = BD}$

B. TRAPECIOS.
Son cuadriláteros que tienen dos lados opuestos paralelos y se les llama base mayor y base menor. Se sub-clasifican en 3:

B.1 Trapecio escaleno. Es aquel que tiene sus lados no paralelos desiguales.

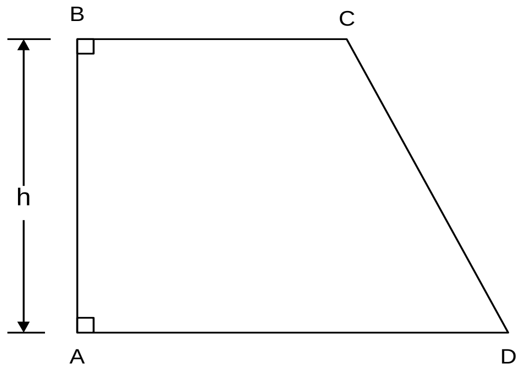


B.2 Trapecio isósceles: Es aquel que tiene sus lados no paralelos congruentes (miden igual).



$\boxed{\theta + \alpha = 180º}$

B.3 Trapecio Rectángulo. Es aquel que tiene dos ángulos rectos.



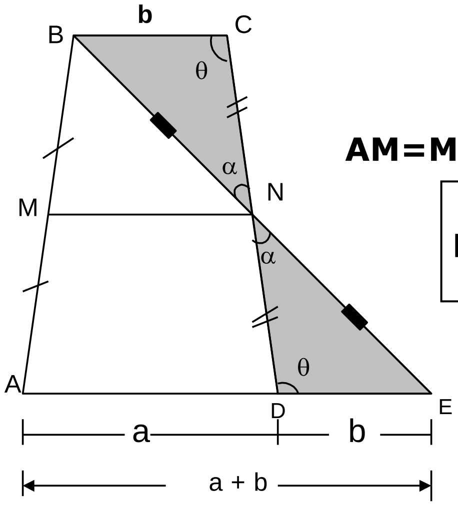
Nota 5.
Cuando se dice altura del trapecio, se sobrentiende que es la distancia entre las bases.

Nota 6.
Mediana del trapecio: Es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos.

Nota 7.
Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles y los ángulos opuestos son suplementarios.

PROPIEDADES DEL TRAPECIO

I) MEDIANA DE UN TRAPECIO: $\overline{MN}$



AM=MB, CN=ND

$$\boxed{\mathbf{MN} = \frac{a+b}{2}}$$

Demostración:

1. Se traza $\overline{BN}$ cuya prolongación intercepta a la prolongación de AD en E.

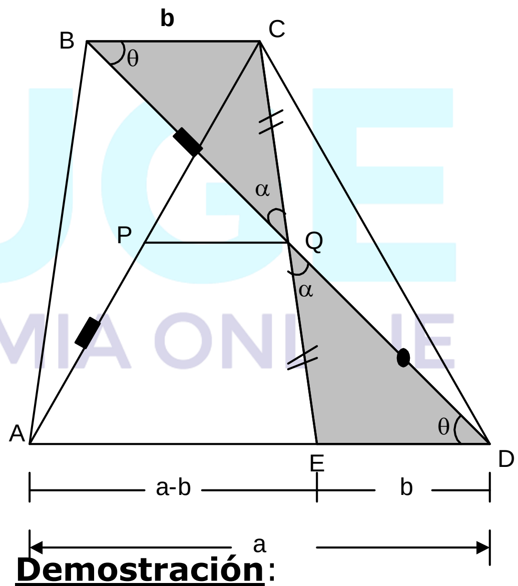
2. $\triangle$ BNC ≅ $\triangle$ NDE (caso ALA)
   BC = DE = b
   BN = NE

3. $\triangle$ ABE **Teorema de la base media**

$$MN = \frac{AE}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{MN} = \frac{a+b}{2}}\quad \textbf{l.q.q.d.}$$

II) SEGMENTO QUE UNE LOS PUNTOS MEDIOS DE LAS DIAGONALES DEL TRAPECIO: $\overline{PQ}$



Demostración:

1) Se traza $\overline{CQ}$ cuya prolongación intercepta a AD en E.

2) $\triangle$ BQC ≅ $\triangle$ QED (**ALA**)
   BC = ED = b
   CQ = QE

3) $\triangle$ ABE Teorema de la base media

$$PQ = \frac{AE}{2}$$

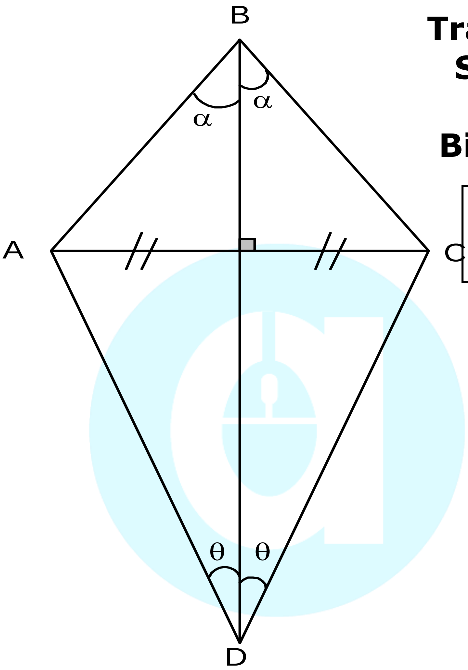
$$\boxed{\mathbf{PQ} = \frac{a-b}{2}\quad \textbf{l.q.q.d.}}$$

C. TRAPEZOIDES

Son cuadriláteros que no tienen ningún lado paralelo a otro. Existen dos clases:

C.1 Trapezoide Simétrico:

Si una de sus diagonales es mediatriz de la otra. La figura es simétrico respecto al eje BD (lo que ven al lado izquierdo de BD es igual a lo que ven al lado derecho).

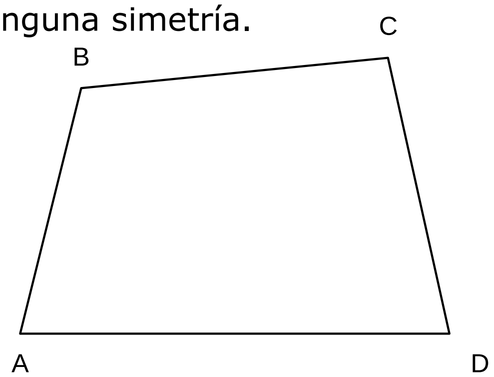


Trapezoide Simétrico o Bisosceles

$$\boxed{\begin{array}{c} AB = BC \\ AD = CD \end{array}}$$

c.2 Trapezoide asimétrico

Es aquel cuadrilátero que no tiene ninguna simetría.



PROPIEDADES DEL TRAPEZOIDE

I) En todo trapezoide, al unir los puntos medios de los lados consecutivos, se forma un paralelogramo cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales de dicho trapezoide.

CONVEXO **CÓNCAVO**

1) MNPQ es paralelogramo cuyo perímetro es igual a la suma de las medidas de las diagonales.

Perímetro (MNPQ) = (AC + BD)

2) El área del paralelogramo MNPQ es igual a la mitad del área del cuadrilátero ABCD.

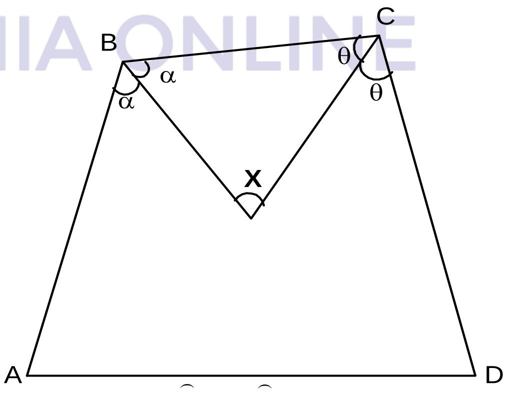
3) En el cuadrilátero convexo se cumple que:

Area(MBN)+Area(PDQ)=Area(AMQ)+Area(PCN)

4) En el cuadrilátero cóncavo se cumple que:

Ara(MBN)-Area(PDQ)=Area (AMQ)+Area (PCN)

II)



$$X = \frac{m\widehat{A} + m\widehat{D}}{2}$$

Demostración:

1) ABCD $2\alpha + 2\theta + m\widehat{A} + m\widehat{D} = 360^{o}$

Mitad $\alpha + \theta + \dfrac{m\widehat{A} + m\widehat{D}}{2} = 180^{o}$ **(I)**

N C B

2) $\triangle$ BEC

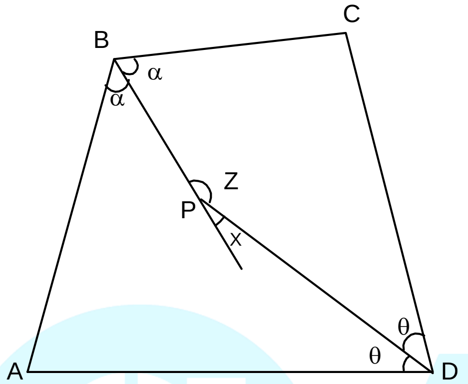
$\alpha + \theta + X = 180^o$ **(II)**

3) II – I

$\alpha + \theta + X = \alpha + \theta + \dfrac{m\overset{\frown}{A} + m\overset{\frown}{D}}{2}$

$$\boxed{X = \frac{m\overset{\frown}{A} + m\overset{\frown}{D}}{2}}$$ **l.q.q.d.**

III



Demostración:

1) BADP $Z = \alpha + m\overset{\frown}{A} + \theta$ **(I)**

2) BCDP

$Z + \alpha + m\overset{\frown}{C} + \theta = 360^o$ **(II)**

3) I + II

$2Z + \alpha + m\overset{\frown}{C} + \theta = \alpha + m\overset{\frown}{A} + \theta + 360^o$

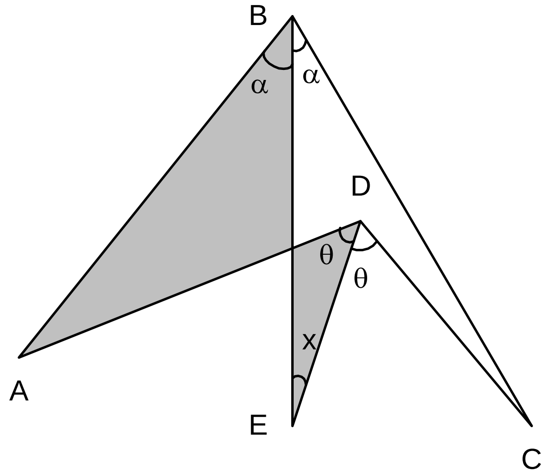
$2Z + m\overset{\frown}{C} - m\overset{\frown}{A} = 360^o$

Mitad $Z + \dfrac{m\overset{\frown}{C} + m\overset{\frown}{A}}{2} = 180^o$ **(III)**

4) $X + Z = 180^o$ **(IV)**

5) **IV=III** $X + Z = Z + \dfrac{m\overset{\frown}{C} + m\overset{\frown}{A}}{2}$

$$\boxed{X = \frac{m\overset{\frown}{C} + m\overset{\frown}{A}}{2}}$$ l.q.q.d.



Demostración

1) EBCD $\theta = X + \alpha + m\overset{\frown}{C}$ I

2) $X + \alpha = m\overset{\frown}{A} + \alpha$ II

3) I en II

$X + X + \alpha + m\overset{\frown}{C} = m\overset{\frown}{A} + \alpha$

$2X = m\overset{\frown}{A} - m\overset{\frown}{C}$

$$\boxed{X = \frac{m\overset{\frown}{A} + m\overset{\frown}{C}}{2}}$$ **l.q.q.d.**

EJERCICIOS

1. Si la medida del ángulo externo de un polígono regular es "k" veces el interior. Calcular "k" ($k \in Z$).
A) 1 y 3 B) 1 y 2 C) 1 y 4
D) 2 y 3 E) 2 y 4

2. Es un polígono regular ABCDE... la m∢ ACE =144°. ¿Cuántas diagonales medias tiene?
A) 100 B) 150 C) 160
D) 170 E) 190

3. Los ángulos interiores B, C y D de un pentágono convexo ABCDE miden 70°, 160° y 50° respectivamente. Las bisectrices interiores de los ángulos BAE y AED, forman un ángulo que mide:
A) 30° B) 35° C)40°
D) 45° E) 50°

4. En un hexágono equiángulo ABCDEF, BC = 2, DE = 1, CD = 4 y AF = 3. Hallar su perímetro.
A) 10 B) 15 C) 18
D) 24 E) 28

5. La diferencia del número de diagonales de cierto polígono y el número de ángulos rectos a que equivale la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 8. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
A) 4 B) 5 C) 8
D) 12 E) 18

6. Las medidas de los ángulos interiores de dos polígonos convexos regulares se diferencian en 20° y las medidas de los ángulos exteriores suman 100°. ¿Cuántas diagonales tienen el polígono de mayor número de lados?
A) 27 B) 18 C) 32
D) 40 E) 52

7. Se tienen dos polígonos regulares cuyos números de diagonales se diferencias en 342 y cuyas medidas de sus ángulos, centrales están en la relación de 2 a 3. Hallar la diferencia de las medidas de sus ángulos interiores.
A) 5° B) 25° C)10°
D) 40° E) 50°

8. El perímetro de un octágono equiángulo ABCDEFGH es $4+4\sqrt{2}$, dicho polígono tiene dos tipos diferentes de lados los cuales se presentan en forma alternada. Hallar $\overline{AF}+\overline{BG}$.
A) $2+\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3+\sqrt{2}$
D) $3+2\sqrt{2}$ E) $4+2\sqrt{2}$

9. Calcular el ángulo central de un polígono regular en donde al disminuir el número de lados en 2 máximos números de diagonales disminuye en 15.
A) 30° B) 45° C)36°
D) 70° E) 90°

10. En un trapecio ABCD; m∢A=m∢B=90; las bisectrices interiores de los ángulos C y D se intersecan en P. Calcular AB, si la distancia desde el punto P a $\overline{CD}$ es 4.
A)6 B)8 C)10
D)12 E)16

11. En un rombo ABCD, se traza $\overline{BH} \propto \overline{AD}$, tal que AH = HD, calcular m∢C.
A)30º B)45º C)40º
D)60º E)75º

12. En un trapecio ABCD se sabe que: m < B = 2m < D; BC = 4; AB = 5. Calcular la medida de la base mayor $\overline{AD}$.
A)6 B)7 C)8
D)9 E)10

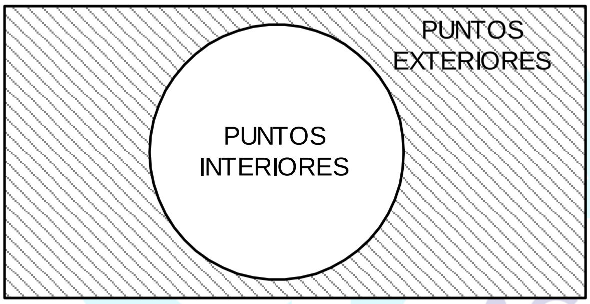
13. En un romboide ABCD se traza la bisectriz $\overline{DM}$ (M en $\overline{BC}$). Si AB = 6, calcular la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$.
A)2 B)3 C)4
D)5 E)$2\sqrt{3}$

CIRCUNFERENCIA I

CIRCUNFERENCIA:
La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto del mismo plano llamado centro.

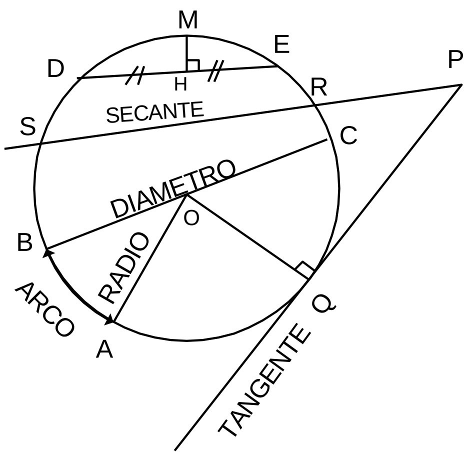
Lugar geométrico
Es el conjunto de puntos que gozan de una misma propiedad.

La circunferencia divide al plano en tres subconjuntos de puntos:
- ❑ Puntos interiores a la circunferencia
- ❑ Puntos exteriores a la circunferencia
- ❑ Puntos de la circunferencia.



CÍRCULO
Es la figura formada por los puntos de la circunferencia y los puntos interiores a la circunferencia.

ELEMENTOS



1. **Radio:**
Es el segmento que une el centro con un punto de la circunferencia(figura $\overline{OQ}, \overline{OA}$).

2. **Arco:**
Es aquella parte de circunferencia limitada por dos puntos de dicha circunferencia (figura: $\overset{\frown}{AB}$)

3. **Cuerda:**
Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia (figura $\overline{DE}$).

4. **Diámetro o Cuerda Mayor:**
Es la cuerda que pasa por el centro y es el doble del radio. (figura $\overline{BC}$).

5. **Recta Secante:**
Es cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos (figura $\overleftrightarrow{RS}$).

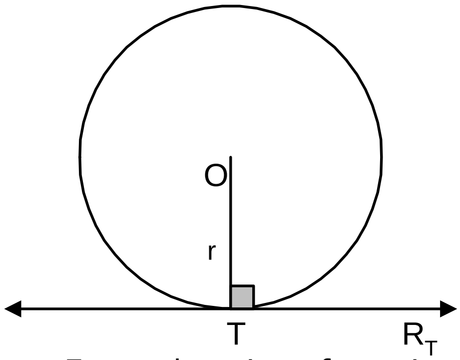
6. **Recta Tangente**.
Es aquella recta que tiene un sólo punto en común con la circunferencia (figura: $\overleftrightarrow{PQ}$).

7. **Flecha o Sagita**.
Es el segmento que une a los puntos medios de la cuerda y el arco de menor longitud que subtiende dicha cuerda.
(figura: $\overline{MH}$)

TEOREMAS FUNDAMENTALES

a) El radio trazado con respecto al punto de tangencia, es perpendicular a la recta tangente que la contiene.

$$\boxed{OT \perp R_T}$$

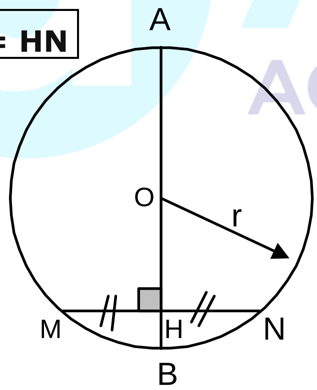


b) En toda circunferencia, un diámetro o radio es perpendicular a una cuerda. Si y solo si pasa por el punto medio de dicha cuerda.

Si: $\overline{AB} \perp \overline{MN}$

Entonces

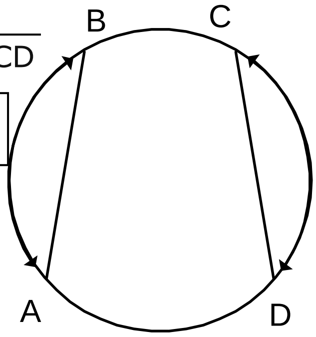
$$\boxed{\mathbf{MH = HN}}$$



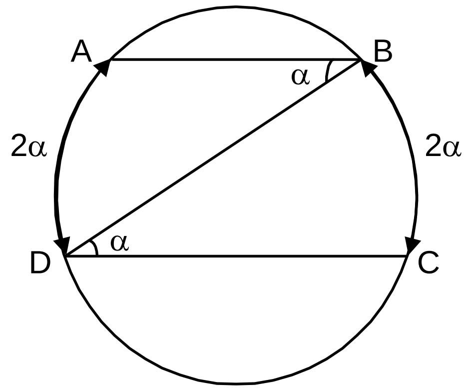
c) En toda circunferencia a cuerdas congruentes se oponen arcos congruentes y viceversa.

Si: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$$\boxed{\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}}$$



d) En toda circunferencia, los arcos comprendidos entre cuerdas paralelas son congruentes (miden iguales).

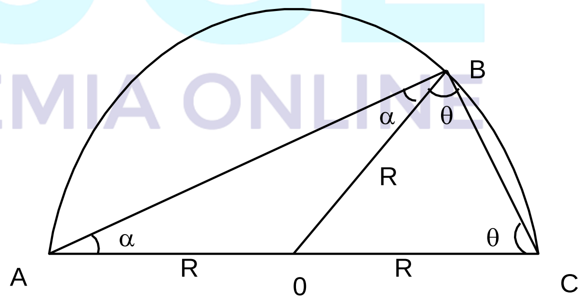


Si AB // CD

Entonces

$$\boxed{\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{BC}}$$

e) Si $\overline{AC}$ es diámetro de una semicircunferencia y B es un punto cualesquiera de dicha semicircunferencia, entonces $m\widehat{ABC} = 90^o$



Demostración

$\triangle ABC \quad \alpha + \alpha + \theta + \theta = 180^o$

$2\alpha + 2\theta = 180^o$

Mitad $\alpha + \theta = 90^o$

I.q.q.d. $\boxed{\mathbf{m\widehat{ABC} = 90^o}}$

MEDIDA DE ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

CLASIFICACIÓN:
Según la posición del vértice del ángulo:

1. Angulo Central:
   Cuando tienen su vértice en el centro de la circunferencia

2. Angulos Excéntricos:
   Cuándo no tienen su vértice en el centro de la circunferencia. Estos se clasifican en periféricos, internos y externos.

2.1 Angulos Periféricos:
Son los que tienen sus vértices en la circunferencia. Pueden ser inscrito, semiinscrito y exinscrito

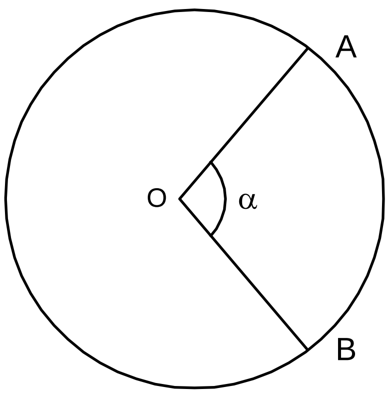
2.2 Angulos internos:
Son los que tienen sus vértices en el interior de la circunferencia.

2.3 Angulos externos:
Son los que tienen su vértice en el exterior de la circunferencia.

DEFINICIONES:

1. ÁNGULO CENTRAL

Es aquel ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia, sus lados contienen cada uno un radio y su medida es igual al arco comprendido entre sus lados; siempre y cuando esta medida del arco sea angular.

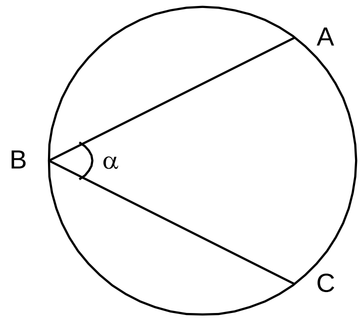


O = Centro

$$\boxed{\alpha = m\overset{\frown}{AB}}$$

2. ÁNGULO INSCRITO

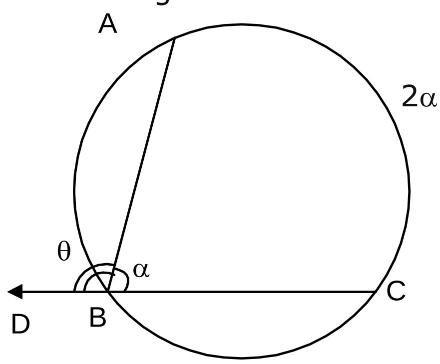
Es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia, sus lados contienen cada uno una cuerda y su medida es igual a la mitad de la medida del arco que subtiende sus lados.



$$\boxed{\alpha = \frac{m\overset{\frown}{AC}}{2}}$$

3. ÁNGULO EXINSCRITO

Es el suplemento de un ángulo inscrito, su vértice se encuentra en la circunferencia, un lado contiene una cuerda y el otro lado la parte exterior de una secante y su medida es igual a la mitad de la medida de todo el arco que no corresponde al ángulo inscrito.



θ = Angulo Exinscrito

$$\boxed{\theta = \frac{m\overset{\frown}{ABC}}{2}}$$

Demostración

$\theta + \alpha = 180º$

$2\theta + 2\alpha = 360º$

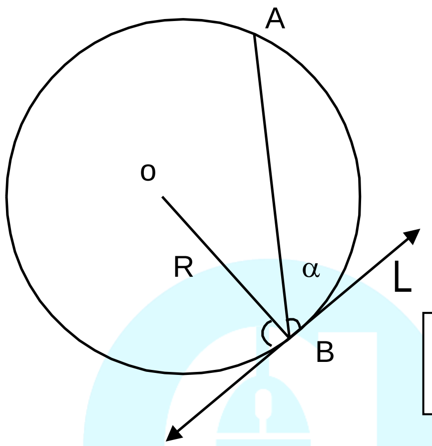
$2\theta + m\overset{\frown}{AC} = 360º$

$2\theta = 360º - m\overset{\frown}{AC}$

$2\theta = m\overset{\frown}{ABC}$

$$\theta = \frac{m\overset{\frown}{ABC}}{2}$$

4. ÁNGULO SEMINSCRITO:
Su vértice se encuentra en la circunferencia, un lado es una tangente y el otro contiene una cuerda y su medida es igual a la mitad de la medida del arco que subtienden sus lados.

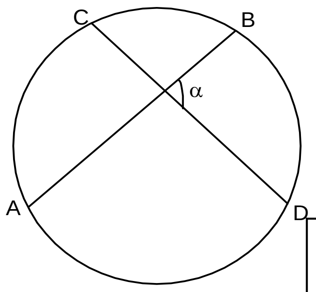


o = Centro

ℓ: tangente

$$\alpha = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$$

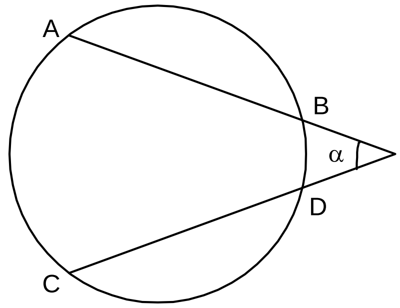
5. ÁNGULO INTERIOR
Su vértice se encuentra en el interior de la circunferencia, está formado por dos secantes que contienen dos cuerdas que se cortan y su medida es igual a la semi suma de los arcos interceptados por él y por su opuesto por el vértice.



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2}$$

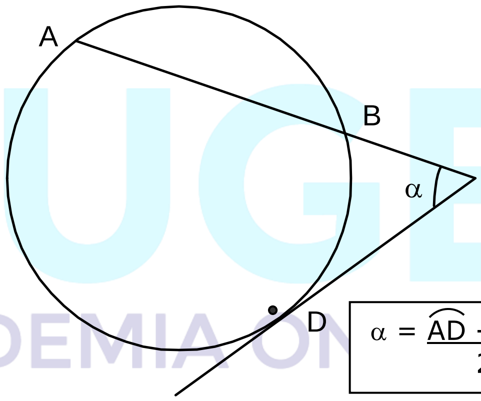
6. ÁNGULO EXTERIOR
Su vértice se encuentra en el exterior de la circunferencia, pudiendo ser sus lados dos secantes, una secante y una tangente o dos tangentes. En éste último caso se llama ángulo circunscrito.
La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos que subtienden sus lados.

a) Lados Secantes



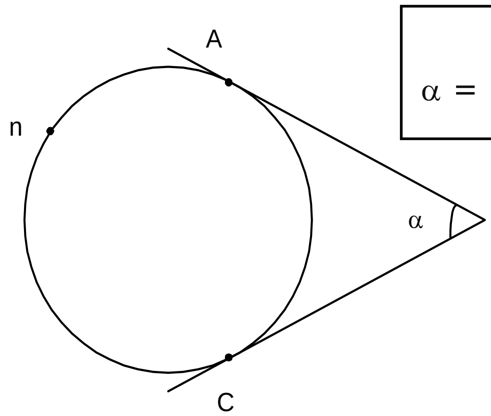
$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BD}}{2}$$

b) Lados tangentes y secantes



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BD}}{2}$$

c) Lados tangentes (Angulo circunscrito)



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AnC} - \overset{\frown}{AC}}{2} \quad (1)$$

De la figura:

$\overset{\frown}{AnC} = 360º - AC$

Reemplazando en la fórmula tenemos:

$$\boxed{\alpha + \overset{\frown}{AC} = 180º} \quad \textbf{(2)}$$

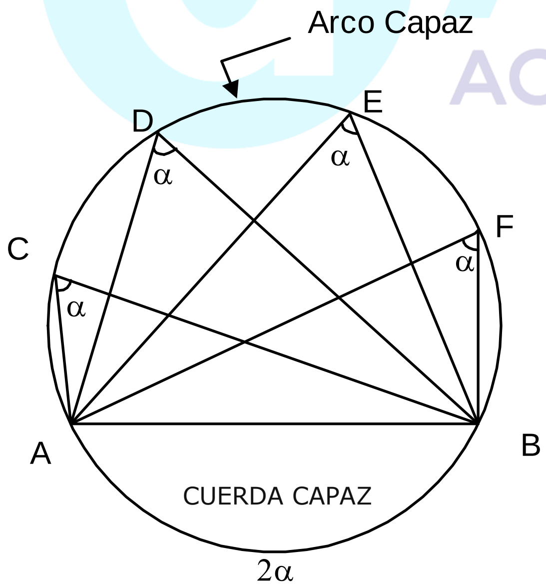
Análogamente:

$$\boxed{\alpha = \overset{\frown}{AnC} - 180º} \quad \textbf{(3)}$$

De las tres fórmulas para ángulo circunscrito, la más utilizada es la fórmula (2).

ARCO CAPAZ

Es el lugar geométrico de todos los puntos que unidos a dos puntos fijos determinan ángulos constantes e iguales al ángulo dado. El arco capaz es un arco de circunferencia y el segmento que une a los puntos fijos se denominan cuerda capaz o segmento capaz.

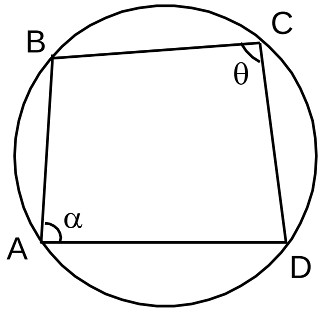


NOTA

- ACDEFB: Arco capaz de todos los ángulos que miden αº
- AB: Cuerda capaz
- El arco capaz de los ángulos de 90º es una semicircunferencia.

PROPIEDADES

1. Las medidas de los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito suman 180º



Demostración:
Por ángulo inscrito

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$$

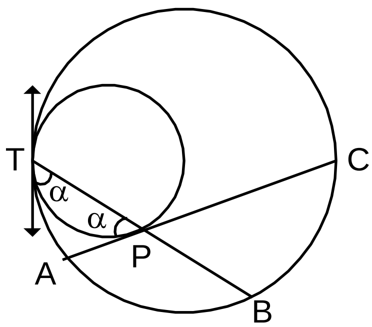
$$\theta = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$$

Suma: $\alpha + \theta = \dfrac{\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD}}{2}$

$$\alpha + \theta = \frac{360º}{2}$$

$$\boxed{\alpha + \theta = 180º}$$

2. En dos circunferencias tangentes interiores cumple: $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC}$



P y T: Puntos de Tangencia

Demostración:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{TA} + \overset{\frown}{AB}}{2} \quad \text{(Angulo Seminscrito)}$$

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{TA} + \overset{\frown}{BC}}{2} \quad \text{(Angulo Interior)}$$

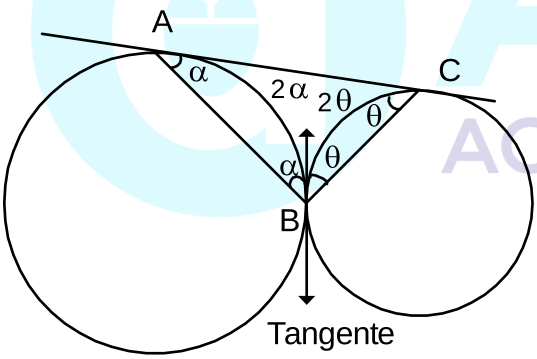
Igualando

$$\frac{\overset{\frown}{TA} + \overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{TA} + \overset{\frown}{BC}}{2}$$

l.q.q.d. $\boxed{\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}}$

3. En dos circunferencias tangentes exteriores cumple:

$\boxed{m\widehat{ABC} = 90º}$



A, B y C: Puntos de Tangencia

Demostración:

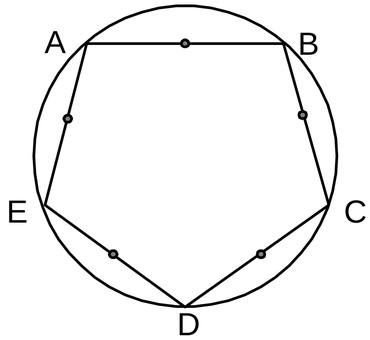
$\triangle$ ABC $\alpha + \alpha + \theta + \theta = 180º$

$2\alpha + 2\theta = 180º$

Mitad $\alpha + \theta = 90º$

l.q.q.d. $\boxed{m\widehat{ABC} = 90º}$

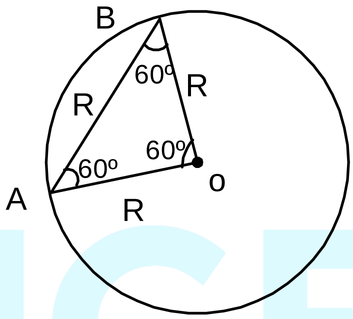
4. El lado de un pentágono regular subtiende un arco de 72º



$$\overset{\frown}{AB} = \frac{360º}{5}$$

$\boxed{\overset{\frown}{AB} = 72º}$

5. Si una cuerda mide igual que el radio entonces dicha cuerda subtiende un arco de 60º



Demostración

1) Por hipótesis
AB = Radio

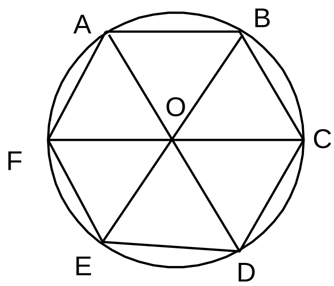
2) Trazamos los radios OA y OB

3) El triángulo AOB es equilátero
$m\widehat{AOB} = 60º$

4) Angulo Central

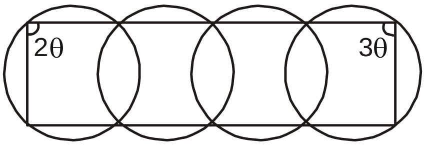
l.q.q.d. $\boxed{m\overset{\frown}{AB} = 60º}$

6. El lado de un hexágono regular subtiende un arco de 60º y la medida del lado del hexágono regular es igual a la medida del radio.



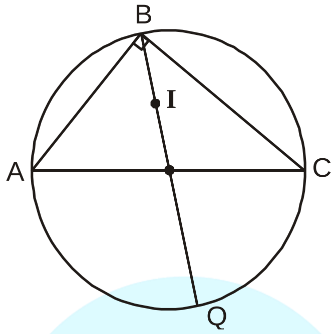
EJERCICIOS

1. En la figura Hallar "θ"



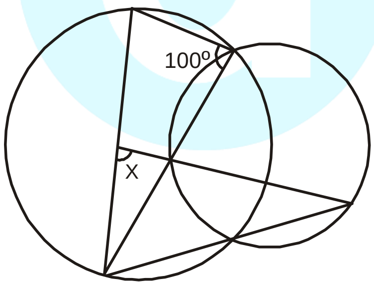
A) 18º B) 20º C) 36º D) 48º E) 72º

2. Si AC = $4\sqrt{2}$ I: Incentro.
Hallar IQ



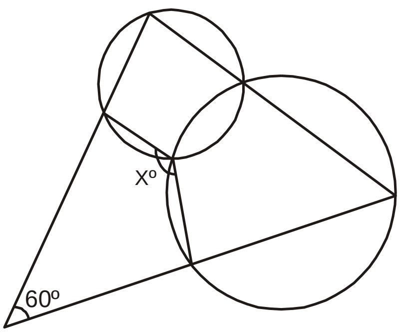
A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 4 E) 6

3. En el gráfico mostrado. Hallar el valor de "x"



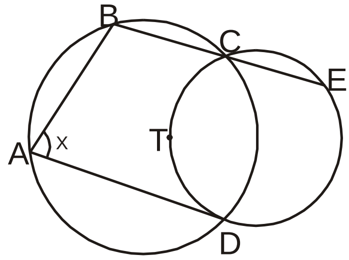
A) 80º B) 90º C)100º
D) 110º E) 120º

4. En la figura mostrada, hallar el valor de "x".



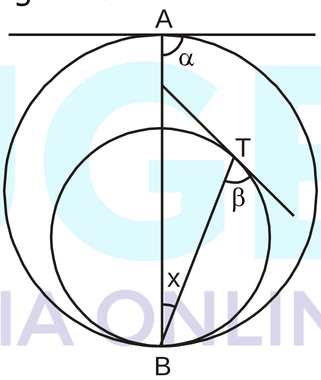
A) 100º B) 120º C) 140º
D) 150º E) 160º

5. Según el gráfico
m $\overset{\frown}{DTC}$ = m $\overset{\frown}{CE}$ = 2x. Hallar "x"



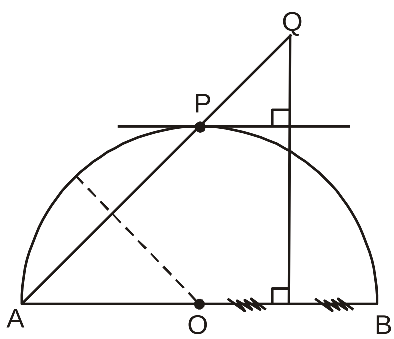
A) 30º B) 40º C) 50º
D) 60º E) 70º

6. Hallar "x" si A, B y T son puntos de tangencia.



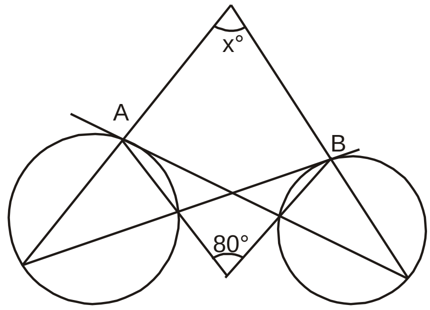
A) $\beta - 2\alpha$ B) $\alpha - \beta$ C) $\alpha + \beta$
D) 2α E) 2β

7. Hallar $\overline{PQ}$, si AP = 4m, "P" es punto de tangencia



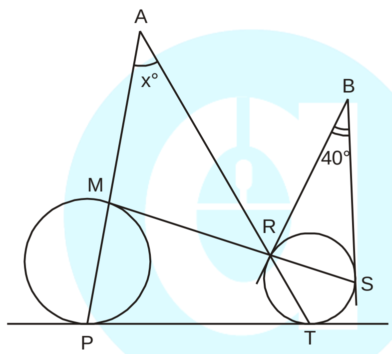
A) 2m B) 3m C) 4m
D) 5m E) 6m

8. Calcular “x”, si A y B, son puntos de tangencia.



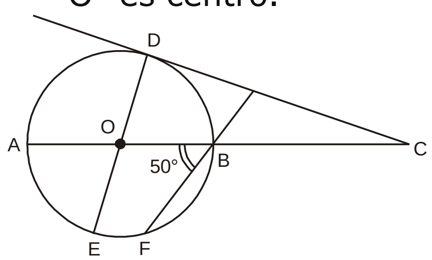
A) 80° B) 60° C) 70°
D) 40° E) 50°

9. Calcular “x”, si: P, R, S, T y M. Son puntos de tangencia.



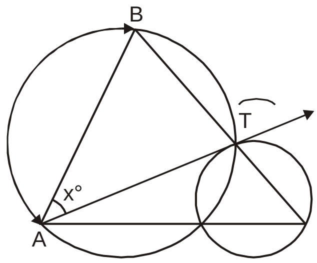
A) 10° B) 15° C) 35°
D) 30° E) 20°

10. Calcular la $m\overset{\frown}{EF}$, si $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ y “O” es centro.



A) 50° B) 60° C) 80°
D) 40° E) 30°

11. Calcular “x”, si mAB = 150° (“T” punto de tangencia)



A) 15° B) 20° C) 30°
D) 45° E) 60°

12. Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB; en el arco AB se ubican los puntos D y C tal que la distancia de dichos puntos hacia el diámetro son 4 y 3; calcule la medida del ángulo entre $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$ si: $m\overset{\frown}{DC} = 90°$

A) 16° B) 20° C) 37°/2
D) 53°/2 E) 8°

13. Dado un paralelogramo ABCD la circunferencia que contiene a los puntos B, A y D interseca a $\overline{BC}$ en M. Calcular la m ∠ BAD, si AB = 5 y MC = 6

A) 37° B) 53° C)74°
D) 100° E) 78°

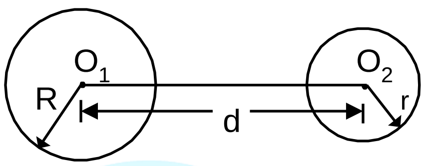
CIRCUNFERENCIA II

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Dos circunferencias de centro O_1 y O_2 en un mismo plano y de radios R y r respectivamente, pueden tener las siguientes proposiciones.

1 Circunferencias Exteriores:

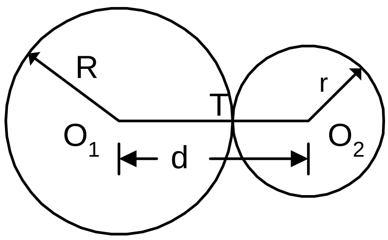
Si la distancia entre los centros es mayor que la suma de sus radios.



$$\boxed{d > R + r}$$

2. Circunferencias tangentes exteriores

Es la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.



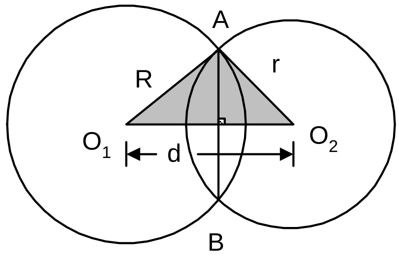
$$\boxed{d = R + r}$$

T : Punto de Tangencia

- El segmento que une los centros pasa por el punto de tangencia.
- La recta tangente común interior a ambas circunferencias es perpendicular al segmento que une sus centros.

3. Circunferencias Secantes

Su la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.



$d = O_1 O_2$

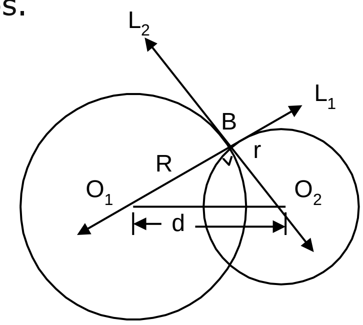
$$\boxed{R - r < d < R + r}$$

Existencia del triángulo

- Tiene dos puntos comunes (A y B)
- La cuerda común $\overline{AB}$ es perpendicular al segmento que une los centros

4. Circunferencias Ortogonales

Si el cuadrado de la distancia entre los centros es igual a la suma de los cuadrados de los radios.



$$\boxed{d^2 = R^2 + r^2}$$

$$m\widehat{O_1BO_2} = 90^o$$

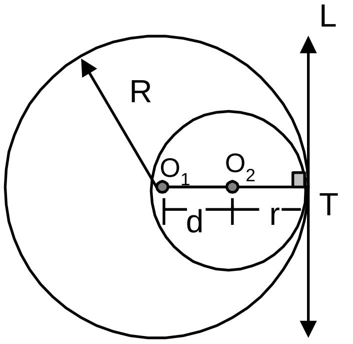
L_1 : Recta tangente a la circunferencia de centro O_2 en el punto B

L_2 : Recta tangente a la circunferencia de centro O_1 en el punto B

5. Circunferencias tangentes interiores

Si la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios.

L : Tangente común



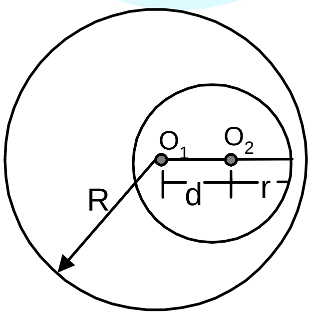
$$\boxed{d = R - r}$$

T : Punto de Tangencia

* La recta que pasa por los centros, también pasa por el punto de tangencia y es perpendicular a la recta tangente común.

6. Circunferencias Interiores

Si la distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios.



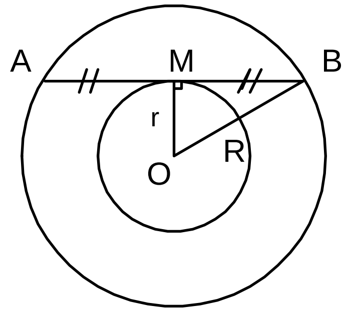
$$d + r < R$$

$$\boxed{d < R - r}$$

- Los puntos de una de ellas (circunferencia de centro O_2) son interiores a la otra. (Circunferencia de centro O_1)

7. Circunferencias concéntricas

Si la distancia entre los centros es cero, es decir, sus centros coinciden. (Tienen el mismo centro).



M : Punto de tangencia

$\triangle$ OMB : PITÁGORAS

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$$

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 - r^2$$

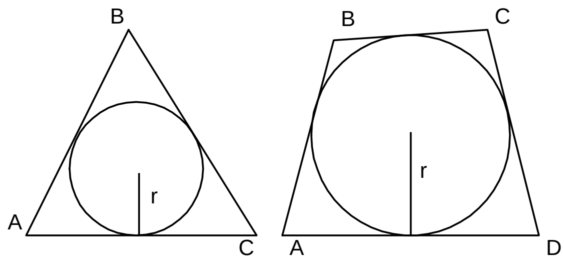
$$\frac{AB}{2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\boxed{AB = 2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

TEOREMAS RELACIONADOS A LA CIRCUNFERENCIA

1. Circunferencia Inscrita

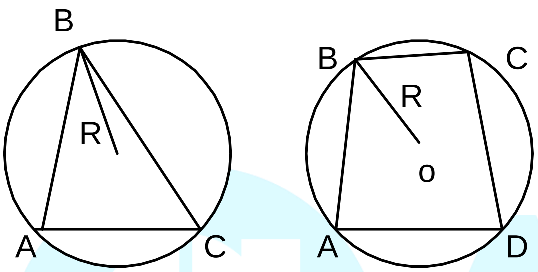
Se dice que una circunferencia está inscrita en un polígono, si se encuentra en el interior de éste y sus lados son tangentes a dicha circunferencia. A su radio se le llama INRADIO.



- r : INRADIO

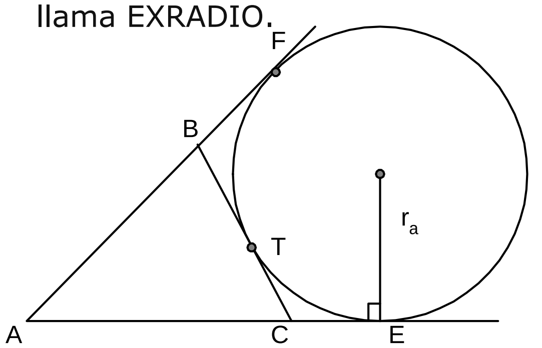
- △ ABC : Triángulo circunscrito
- ⏢ ABCD : Cuadrilátero circunscrito
- La circunferencia es inscrita

2. Circunferencia Circunscrita
Es aquella circunferencia que pasa por todos los vértices de un polígono. A su radio se le llama CIRCUNRADIO.



- R : Circunradio
- O : Circuncentro
- △ ABC : Triángulo inscrito
- ⏢ ABCD : Cuadrilátero inscrito
- La circunferencia es circunscrita.

3. Circunferencia Exinscrita
Se dice que una circunferencia es exinscrita a un triángulo, si se encuentra en el exterior de dicho triángulo y es tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos lados. A su radio se le llama EXRADIO.



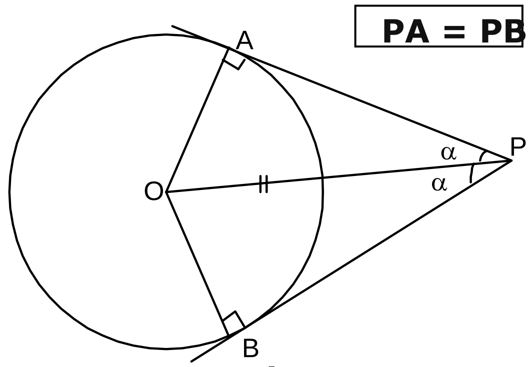
F, T y E: Son puntos de tangencia.

- r_a : Exradio Relativo al lado BC
- △ ABC : Triángulo exinscrito
- En todo triángulo, hay tres circunferencias exinscritas.

TEOREMAS DE TANGENTE

1. Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son congruentes.

$\boxed{PA = PB}$



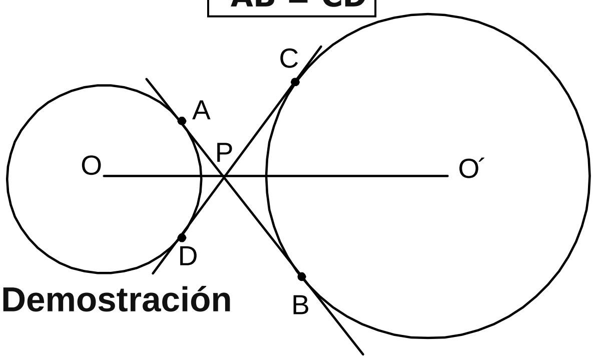
Demostración:

◺ OAP ≅ ◺ OBP (4º caso)

$\boxed{PA = PB}$ **l.q.q.d.**

2. Los tangentes interiores comunes a dos circunferencias exteriores son congruentes y la recta que pasa por los centros también pasa por el punto de intersección de dichas tangentes.

$\boxed{AB = CD}$



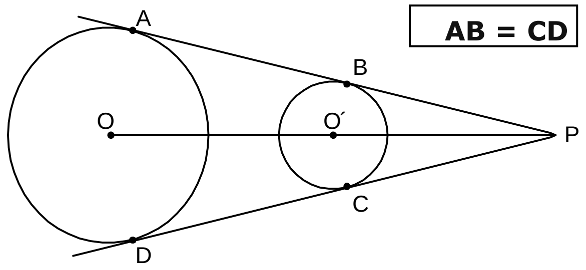
Demostración

1) PA = PD
2) <u>PB = PC</u>

Sumando:
PA+PB=PD + PC $\boxed{AB = CD}$ **l.q.q.d.**

3. Los tangentes exteriores comunes a dos circunferencias son congruentes y su punto de intersección se halla sobre la recta que pasa por los centros.

AB = CD



Demostración

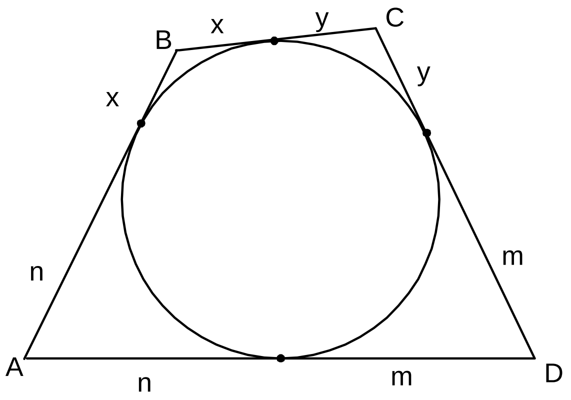
1) PA = PD
2) <u>PB = PC</u>
Restando
PA – PB = PD – PC

$\boxed{AB = CD}$ lqqd.

<u>TEOREMA DE PITOT</u>

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia o circunscriptible, se cumple que la suma de las medidas de dos lados opuestos es igual a la suma de las medidas de los otros dos lados.

AB + CD = BC + AD



Demostración

AB = x + n
<u>CD = y + m</u>

Sumando:
$AB + CD = \underbrace{x + y} + \underbrace{n + m}$

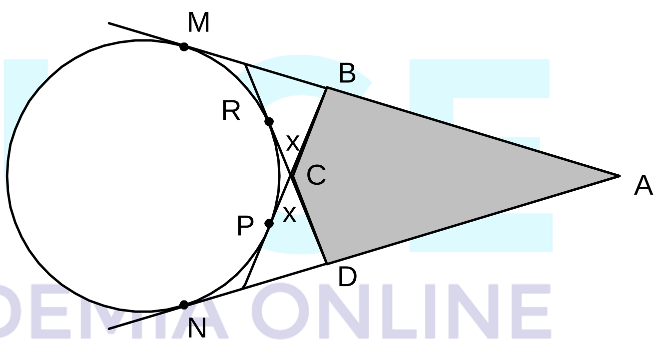
AB + CD = BC + AD
lqqd

<u>GENERALIZANDO</u>:
En todo polígono circunscrito con un número par de lados, la suma de los lados no consecutivos es igual a la suma del resto de lados.

<u>TEOREMA DE STEINER</u>

En todo cuadrilátero exinscrito o exinscriptible la diferencia de las medidas de dos lados opuestos es igual a la diferencia de las medidas de los otros dos lados.

AB – CD = AD – BC



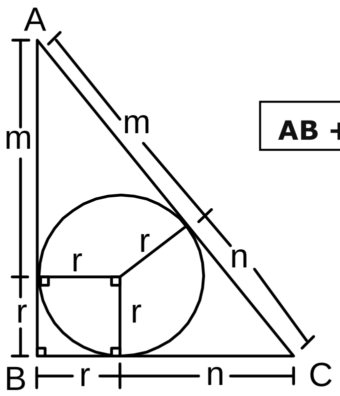
Demostración

1) AM = AN
AB + BP = AD + DR
AB + BC + x = AD + CD + x

AB – CD = AD – BC **l.q.q.d.**

<u>TEOREMA DE PONCELET</u>

En todo triángulo rectángulo la suma de las medidas de los catetos es igual a la medida de la hipotenusa mas la medida del diámetro de la circunferencia inscrita.



AB + BC = AC + 2r

r : Inradio

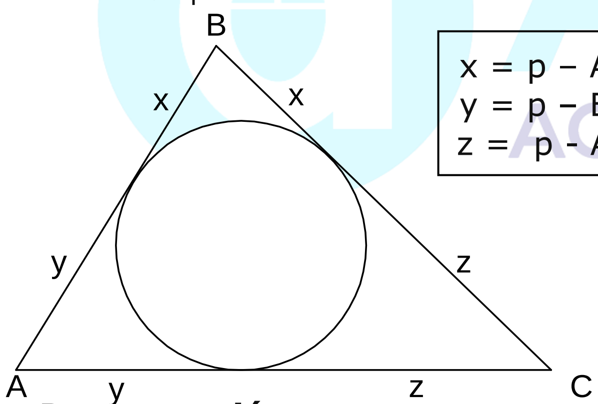
Demostración

AB = m + r
<u>BC = n + r</u>
Sumando:
AB + BC = m + n + 2 r

l.q.q.d. $\boxed{\mathbf{AB + BC = AC + 2r}}$

<u>PROPIEDADES</u>

1. En todo triángulo circunscrito se cumple:



x = p – AC
y = p – BC
z = p - AB

Demostración

1) 2x + 2y + 2z = perímetro (ABC)

2) mitad $x + \underbrace{y + z} = p$

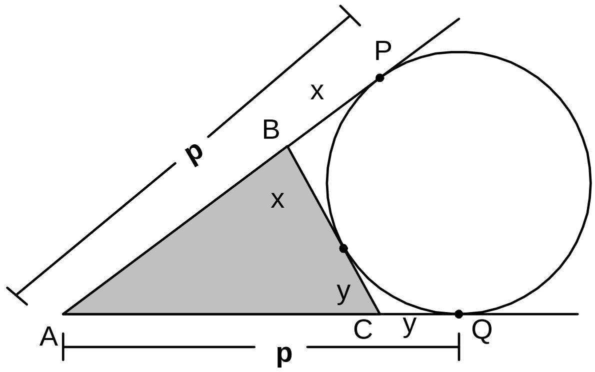
$x + \quad AC \quad = p$

$\boxed{\mathbf{x = p - AC}}$ **lqqd**

2. En todo triángulo ex-inscrito se cumple:

$\boxed{AP = AQ = \mathbf{p}}$

p : Semiperímetro del Δ ABC



Demostración

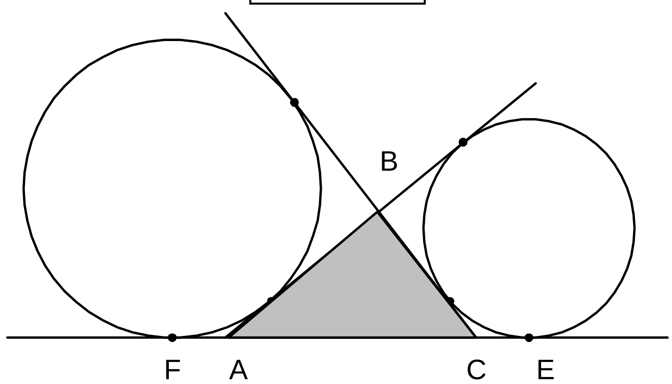
Perímetro (ABC) = AB + BC + AC
$= \underbrace{AB + x} + \underbrace{y + AC}$
= AP + AP
Perímetro (ABC) = 2AP

<u>Mitad</u>

$\boxed{\mathbf{p = AP}}$ **lqqd**

3. Circunferencias exinscritas relativas al lado AB y al lado BC, cumple:

FA = CE



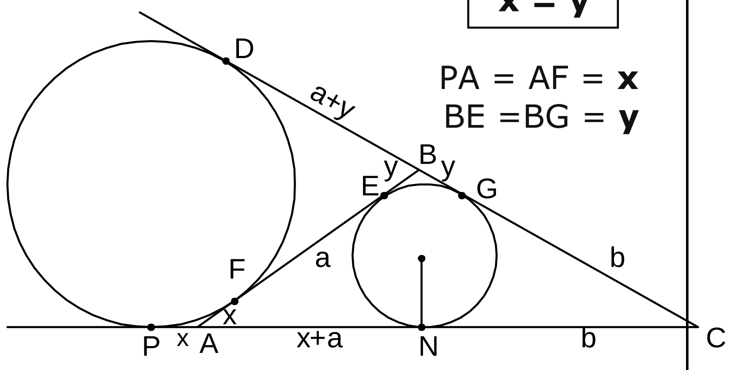
Demostración

1) FA + AC = semiperímetro (ΔABC)
2) <u>AC + CE = semiperímetro (ΔABC)</u>
3) Igualando
FA + $\cancel{AC}$ + $\cancel{AC}$ + CE

$\boxed{\mathbf{FA = CE}}$ **lqqd**

4. Circunferencia exinscrita relativa al lado AB y circunferencia inscrita, cumple:

$$\boxed{x = y}$$



PA = AF = **x**
BE =BG = **y**

Demostración

$$PC = DC$$
$$x + x + a + b = a + y + y + b$$
$$2x = 2y$$

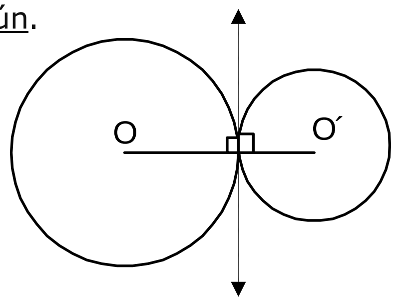
Mitad $\boxed{x = y}$

L.q.q.d.

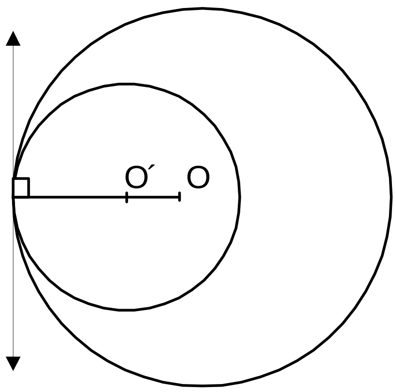
5. La suma de las medidas de los radios de las circunferencias exinscritas relativas a los catetos de un triángulo rectángulo, es igual a la medida de la hipotenusa.

Recomendaciones para resolver problemas de ángulos en la circunferencia

1. Se tiene dos circunferencias tangentes interiormente o tangentes exteriormente, por lo general los datos están en una circunferencia y la incógnita está en la otra, trace en estos casos por el punto de contacto una tangente común.

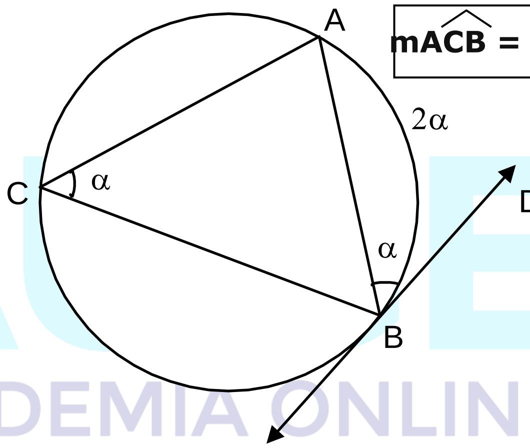


TANGENTE COMÚN



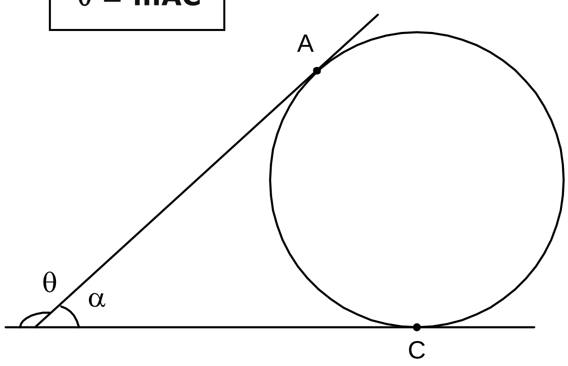
2. Debemos tener en cuenta que la medida del ángulo semi-inscrito es igual a la medida del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco.

$$\boxed{m\widehat{ACB} = m\widehat{ABD}}$$



3. Debemos tener en cuenta que la medida del ángulo adyacente a un ángulo circunscrito es igual a la medida del arco que subtiende los lados de este último.

$$\boxed{\theta = m\widehat{AC}}$$



Demostración

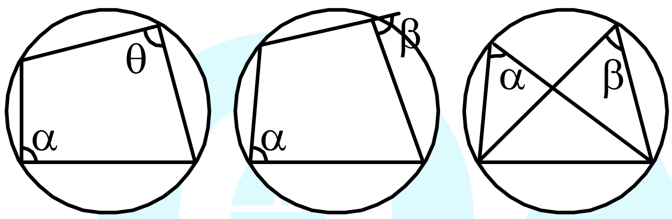
α : ángulo circunscrito
$\theta + \alpha = 180º$
$m\overset{\frown}{AC} + \alpha = 180º$
Igualando:

$\boxed{\theta = m\overset{\frown}{AC}}$ lqqd

CUADRILÁTERO INSCRITO

Es aquel cuadrilátero que tienen sus cuatro vértices en una misma circunferencia.

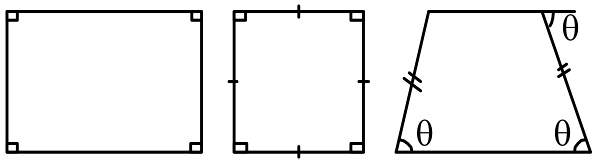
CASO I **CASO II** **CASO III**

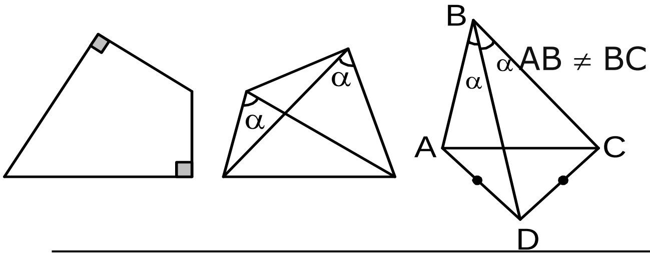


$\alpha + \theta = 180º$ $\alpha = \beta$ $\alpha = \beta$

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

Es aquel cuadrilátero que puede inscribirse en una circunferencia, para ello debe cumplir cualquiera de los casos de cuadrilátero inscrito o de la propiedad, sin que se dibuje la circunferencia. Ejemplo: El rectángulo, el cuadrado, el trapecio isósceles.

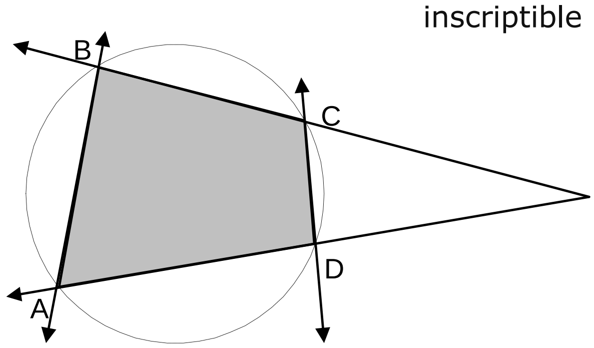




RECTAS ANTIPARALELAS

Dos rectas son antiparalelas con respecto a los lados de un ángulo, cuando forman con los lados del ángulo, un cuadrilátero inscriptible.

ABCD: Cuadrilátero inscriptible

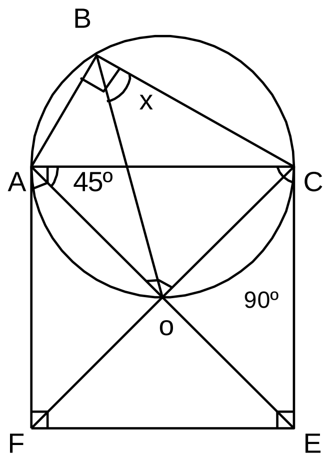


EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sobre la hipotenusa $\overline{AC}$ de un triángulo rectángulo ABC se construye exteriormente el cuadrado ACEF de centro O. Calcular la medida del ángulo OBC.

a) 30º b) 36º c) 45º
d) 53º e) 60º

Resolución



El cuadrilátero ABCO es inscriptible ya que: $m\widehat{ABC} + m\widehat{AOC} = 180º$

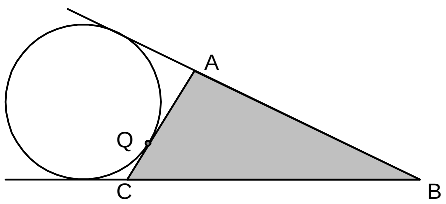
Entonces:

$$\boxed{X = 45º = \frac{\overset{\frown}{OC}}{2}}$$

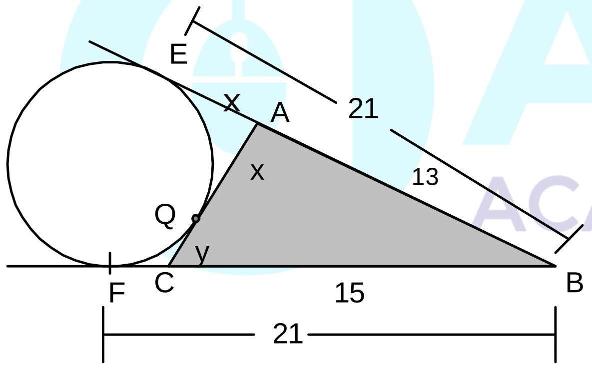
Rpta. C

2. En la figura, calcular el producto X.Y; si AB = 13, BC = 15, AC=14, AQ = X, QC = Y

a) 49
b) 30
c) 42
d) 56
e) 64



Resolución:



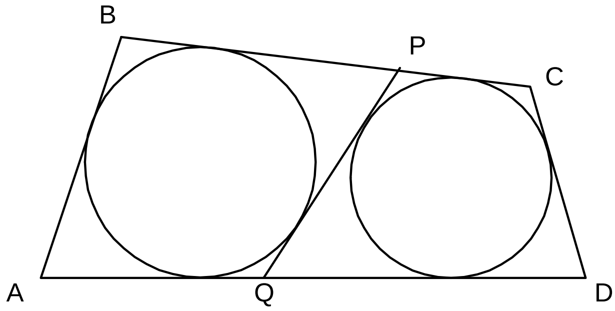
1. Propiedad:
FB = EB = semiperímetro (ABC)
FB = EB = 21

2. 13 + x = 21 $\boxed{x = 8}$

3. 15 + y = 21 $\boxed{y = 6}$

4. El Producto **x . y = 48** Rpta

3. En la figura mostrada. Hallar la medida del segmento PQ. Si ABCD es un cuadrilátero, además: AB + CD = 24 cm, BC + AD = 40 cm



a) 6 cm b) 8 cm c) 10 cm
d) 12 cm d) 16 cm

Resolución

Incognita: PQ
Dato: AB + CD = 24
BC + AD = 40

1. PITOT AB + PQ = BP + AQ
2. PITOT CD + PQ = PC + QD
Suma $\underbrace{AB+CD}_{24}+2PQ=\underbrace{BC+AD}_{40}$

$24 + 2PQ = 40$

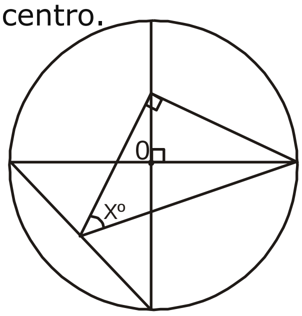
$PQ = \frac{40-24}{2}$

$\boxed{\textbf{PQ = 8}}$ **Rpta.**

EJERCICIOS

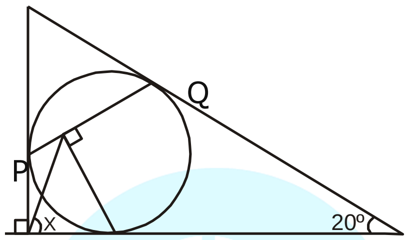
1. La hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo miden 30 y 24. Hallar el radio de la circunferencia Ex – inscrita al otro cateto.
A) 10 B) 9 C) 7
D) 12 E) 8

2. En la figura hallar "x" si "O" es centro.



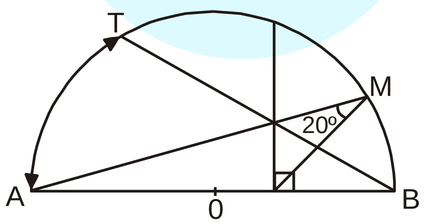
A) 30º B) 37º C) 45º
D) 53º E) 60º

3. En la figura mostrada, Hallar "x" (P y Q son puntos de tangencia)



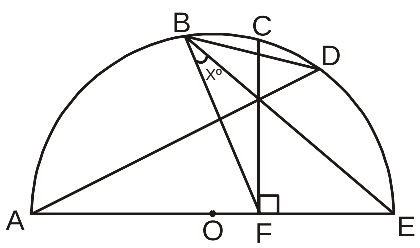
A) 30º B) 50º C) 70º
D) 80º E) 85º

4. En la semicircunferencia hallar m $\overset{\frown}{AT}$. Si "O" es centro.



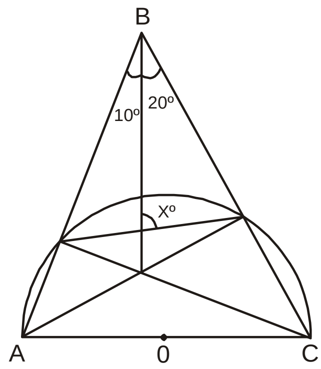
A) 40º B) 20º C) 45º
D) 60º E) 80º

5. En el gráfico mostrado hallar m∢ FBE si m ∢ EBD = 30º.



A) 15º B) 20º C) 25º
D) 30º E) 60º

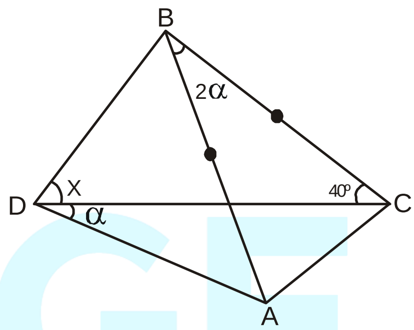
6. Según el gráfico. Hallar "x".



A) 60º B) 70º C) 80º
D) 90º E) 100º

7. Si AB = BC. Hallar "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 60°



8. Si La mediana de un trapecio circunscrito mide 9u. Calcular su perímetro.
A) 18 B) 36 C) 27
D) 45 E) 24

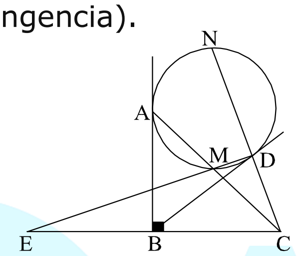
9. En un triángulo ABC, recto en B se traza la altura BH y las bisectrices BM y BN de los ángulos ABH y CBH respectivamente. Si MN = 4. Calcular la longitud del inradio del triángulo ABS
A) 4 B) 2 C) 8
D) 1 E) 12

10. La circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo ABC recto en B, en donde BC > AB, es tangente en N a AB y en P a BC. Exteriormente se construye el trapezoide BCED en el cuál la circunferencia inscrita es tangente en M a BD y en Q a BC. Hallar PQ si ED = 5, AC = CE y DM + AN = 3

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

11. Calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de perímetro 30, si el radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo mide 2.
A) 10 B) 15 C) 13
D) 17 E) 20

12. De acuerdo al gráfico AB = BC. Calcule EM, si NC = 8cm. (A y D son puntos de tangencia).

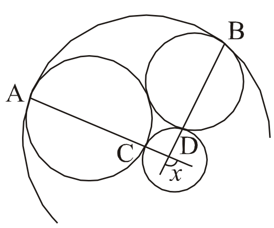


A) 4cm
B) 6cm
C) 8cm
D) $4\sqrt{2}$ cm
E) $8\sqrt{2}$ cm

13. Dado un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$) circunscrito a una circunferencia de centro O. La prolongación de $\overline{BO}$ interseca a $\overline{AD}$ en P. Si AP=2PD, calcular m< BAD.
A) 45° B) 60° C)75°
D) 63,5° E) 72,5°

14. Si, la suma de las medidas de los arcos AB y CD es igual a 160°. Calcule el valor de x. (A, B, C y D son puntos de tangencia).

A) 40°
B) 50°
C) 70°
D) 80°
E)90°



PROPORCIONALIDAD SEMEJANZA

CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD:
Relativo a proporción.

RAZÓN GEOMÉTRICA
Dado dos números racionales a y b diferentes de cero, la razón geométrica entre estos dos números es el cociente a/b.

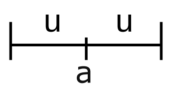
PROPORCIÓN GEOMÉTRICA
Si a/b y c/d son dos razones iguales, la proporción geométrica es a/b = c/d, se lee "a es a b como c es a d".

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS
Dada la proporción a/b = c/d se cumple:

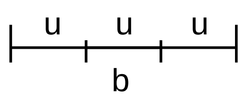
1. a.d = c.b
2. (a+c)/(b+d)=a/b;(a-c)/(b-d)=a/b
3. (a-b)/b=(c-d)/d; (a+b)/b=(c+d)/d

PROPORCIONALIDAD ENTRE LONGITUDES DE SEGMENTOS
Sean los segmentos de longitudes:

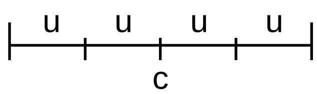
a = 2u



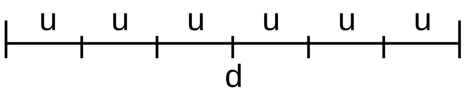
b = 3u



c = 4u



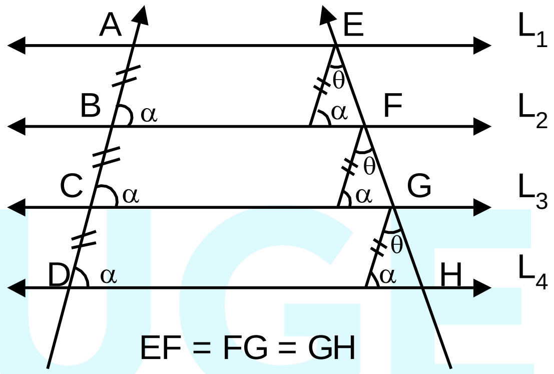
d = 6u



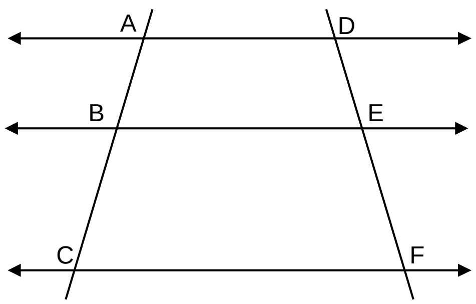
Luego $\boxed{a/b = c/d}$ Proporción

PARALELAS EQUIDISTANTES

Si sobre una recta se toman puntos equidistantes y por ellas se trazan paralelas, cualquier recta secante que intercepte a dichas paralelas quedará dividida en partes iguales.



TEOREMA DE THALES
Tres o más rectas paralelas al ser interceptados por dos o más rectas secantes determinan segmentos proporcionales.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

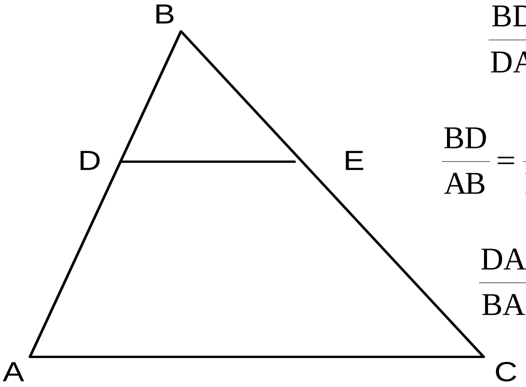
$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

COROLARIO DE THALES

Toda paralela a un lado de un triángulo que intercepta a los otros dos lados, lo divide en partes directamente proporcionales.

$\overline{DE} // \overline{AC}$



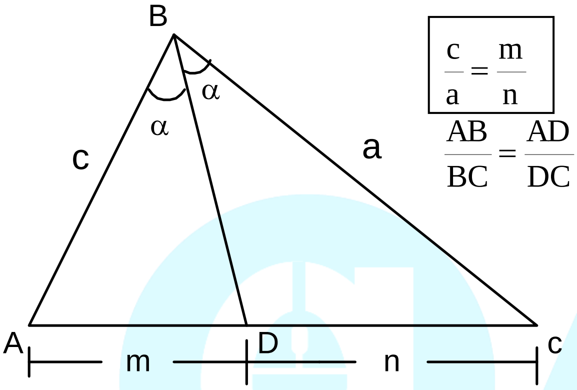
$$\frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EC}$$

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$$

$$\frac{DA}{BA}=\frac{EC}{BC}$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ

Bisectriz interior $\overline{BD}$



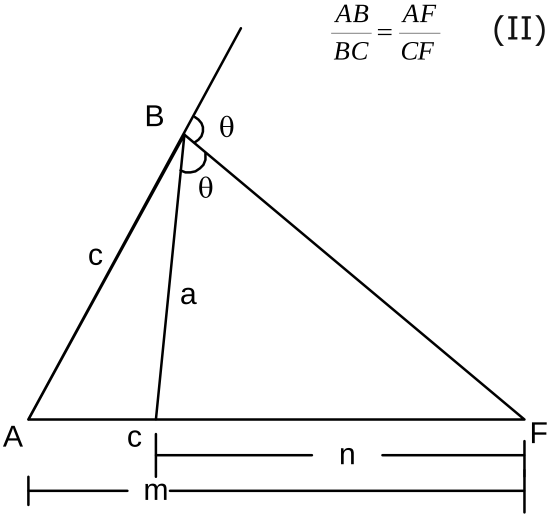
$$\boxed{\frac{c}{a}=\frac{m}{n}}$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC} \qquad (I)$$

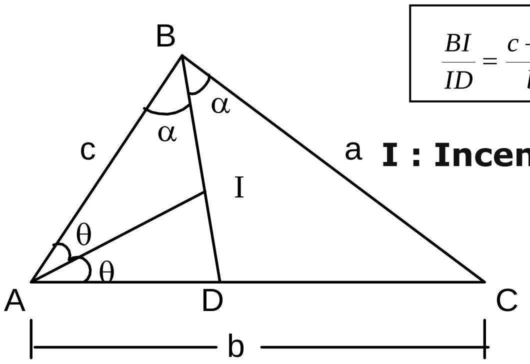
Bisectriz exterior BF

$$\boxed{\frac{c}{a}=\frac{m}{n}}$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{CF} \qquad (II)$$



TEOREMA DEL INCENTRO

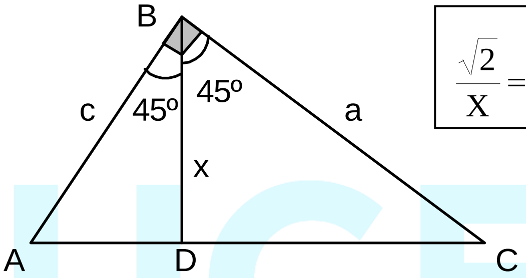


$$\boxed{\frac{BI}{ID}=\frac{c+a}{b}}$$

I : Incentro

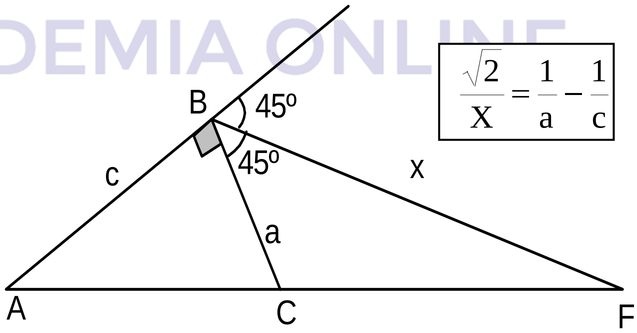
CALCULO DE LA BISECTRIZ A LA HIPOTENUSA

Bisectriz interior: BD = X



$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{X}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}$$

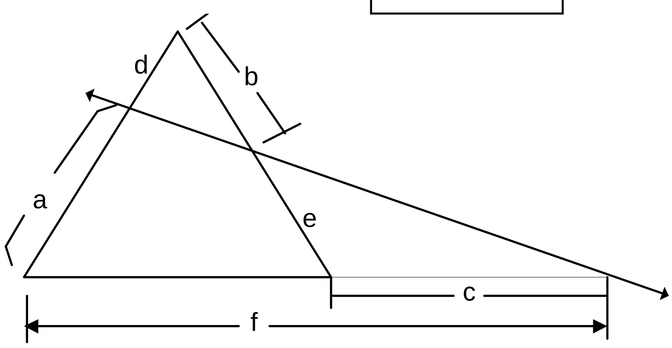
Bisectriz exterior: BF = X



$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{X}=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}$$

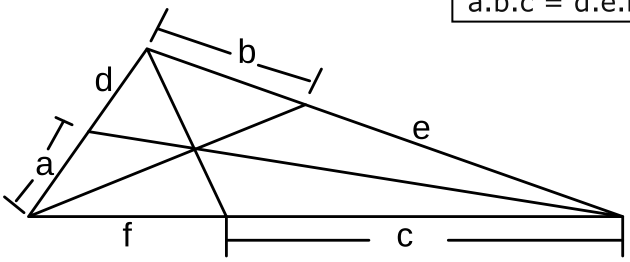
TEOREMA DE MENELAO

$\boxed{a.b.c = d.e.f}$



TEOREMA DE CEVA

$$a.b.c = d.e.f$$



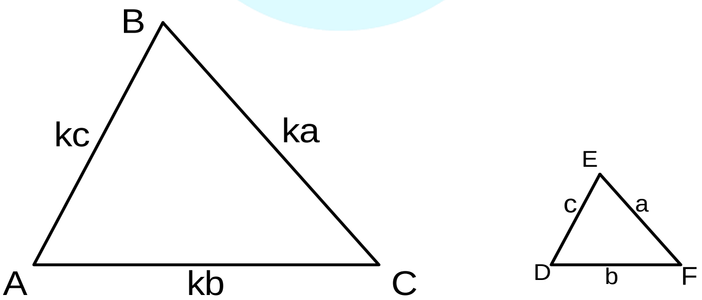
SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Dos triángulos se llaman semejantes cuando sus ángulos miden respectivamente iguales y los lados homólogos proporcionales.

Lados homólogos.- Son lados opuestos a los ángulos respectivamente congruentes.

K : constante de proporcionalidad.

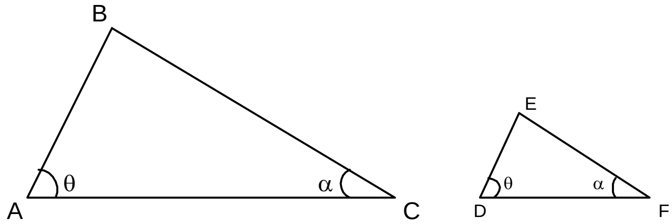
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = K$$



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULO

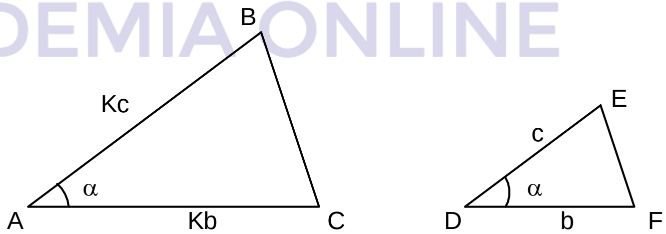
1. **CASO AAA**.- si dos triángulos tienen 2 ángulos que miden respectivamente iguales.



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

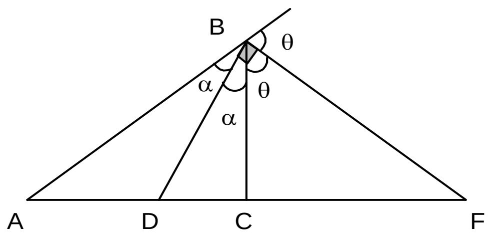
2. **CASO LAL**.- Si dos triángulos tienen 2 lados proporcionales y los ángulos comprendidos miden iguales

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = K$$



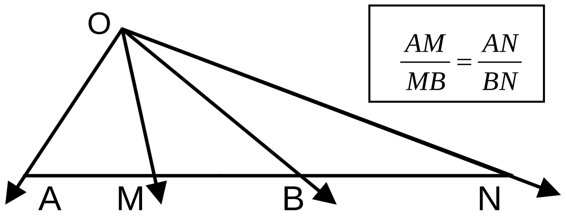
$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF$$

3. **CASO LLL.** Si dos triángulos tienen 3 lados proporcionales (ver figura uno de semejanzas de Triángulo)



HACES ARMONICOS

Se llama haz armónico todo sistema de 4 rectas concurrentes en O (AMBN) que pasan por los puntos A.M.B.N. de una cuaterna armónica



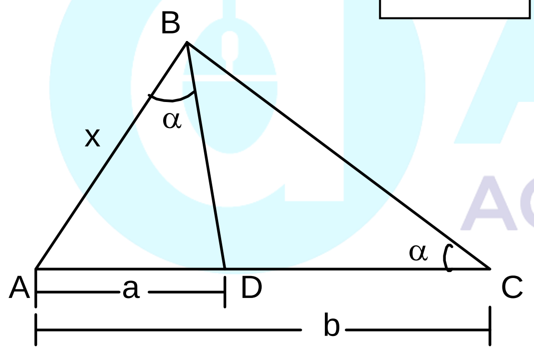
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}$$

Corolario.- Toda sección rectilínea AMBN de un haz armónico, constituye una cuarterna armónica de puntos.

PROPIEDADES DE SEMEJANZA

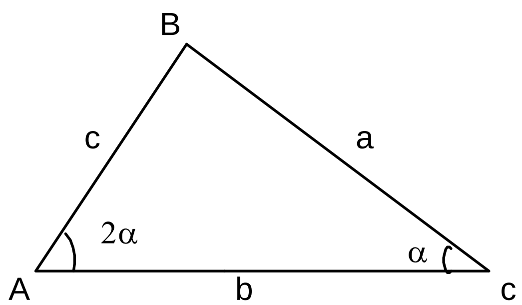
1.

$$x^2 = a.b$$



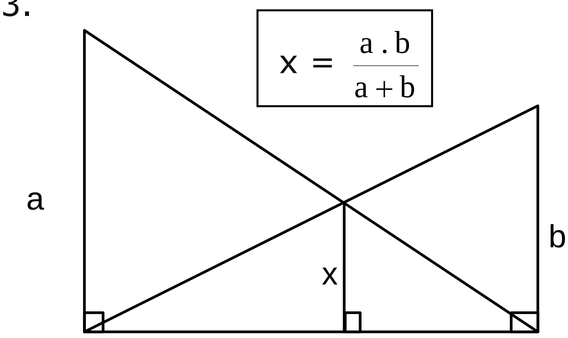
2.

$$a^2 = c\ (b+c)$$



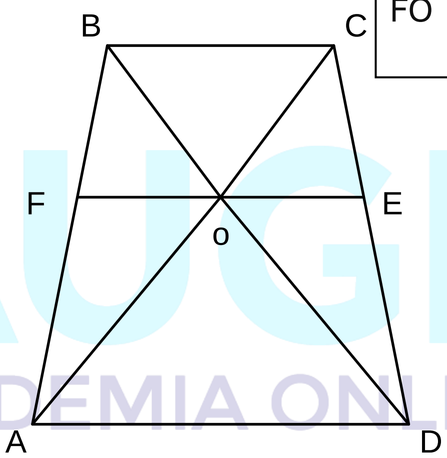
3.

$$x = \frac{a\,.\,b}{a+b}$$



4. ABCD es trapecio, $\overline{FE}\,//\,\overline{BC}$

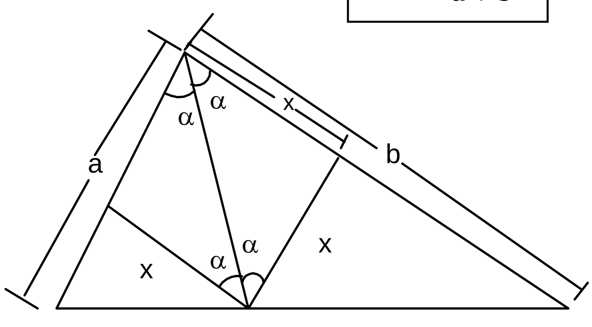
$$FO = OE = \frac{a\,.\,b}{a+b}$$



$$FE = \frac{2a\,.\,b}{a+b}$$

5.

$$x = \frac{a\,.\,b}{a+b}$$



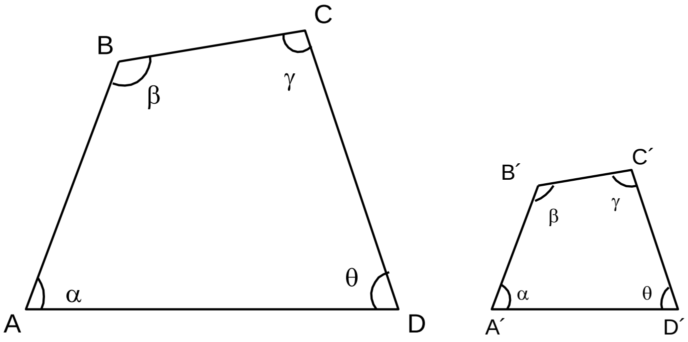
POLIGONOS SEMEJANTES

Dos polígonos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales.
Así, en la figura tenemos:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$ | $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$

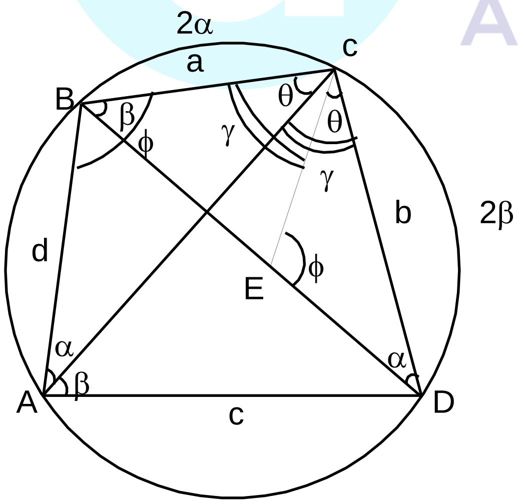
$\measuredangle C \cong \measuredangle C'$ | $\measuredangle D \cong \measuredangle D'$



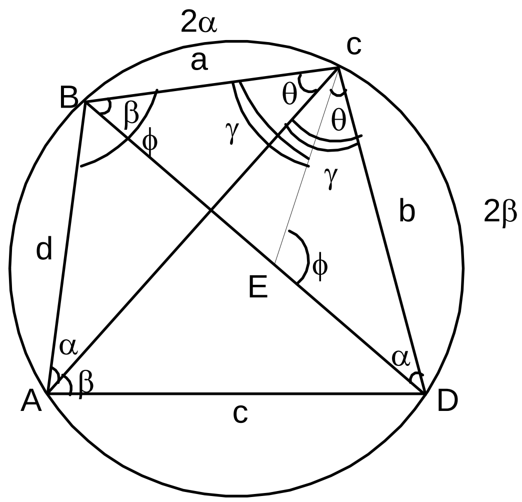
Polígono ABCD ~ Polígono A´B´C´D´

TEOREMA DE PTOLOMEO

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.



$\boxed{AC.BD = a.c + b.d}$



Demostración:

1.Trazar $\overline{CE}$ tal que $m\widehat{ECD} = m\widehat{ACB} = \theta$

2. $\Delta\ ACD \sim \Delta\ BCE$

$$\frac{AC}{C}=\frac{a}{BE} \Rightarrow AC.BE = a.c$$

3. $\Delta\ ABC \sim \Delta\ CED$

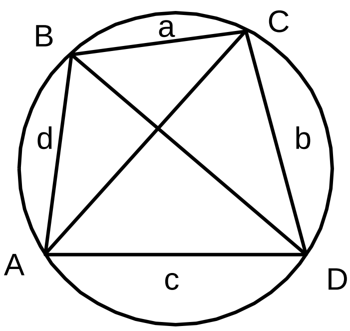
$$\frac{AC}{d}=\frac{b}{ED} \Rightarrow \underline{AC.ED = b.d}$$

Suma $\quad AC(BE+ED)= a.c+b.d$

l.q.q.d $\quad \boxed{AC\ \ BD = a.c + b.d}$

TEOREMA DE VIETTE

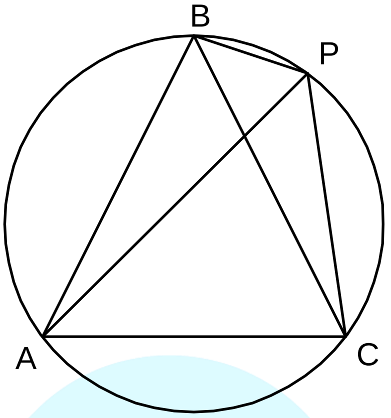
En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, la razón de las diagonales es igual a la razón de las sumas de los productos de los lados que concurren a sus extremos.



$$\boxed{\frac{AC}{BD}=\frac{c.d+a.b}{a.d+b.c}}$$

TEOREMA DE CHADÚ

En un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia, se ubica un punto P sobre el arco BC entonces cumple: la distancia del punto P al vértice A es igual a la suma de las distancias del punto P a los vértices B y C.



$$\boxed{PA = PB + PC}$$

Demostración:

Teorema de Ptolomeo

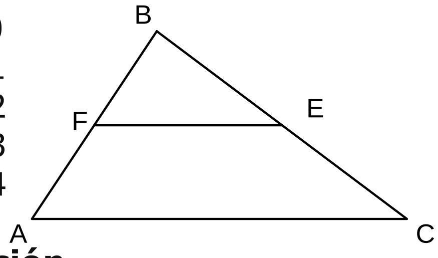
$PA \cdot \ell = PB \cdot \ell + PC \cdot \ell$

$$\boxed{PA = PB + PC}$$

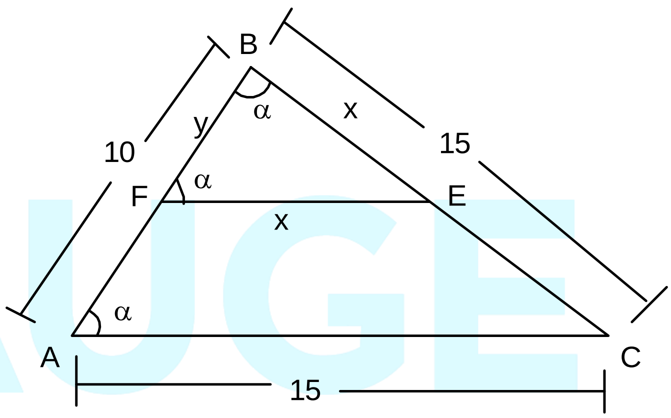
PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular FE. Si: $\overline{FE} // \overline{AC}$, perímetro del triángulo FBE es igual al perímetro del trapecio AFEC, AB = 10, AC=BC=15.

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14



Resolución



Incognita FE = x

1. THALES $\frac{y}{10} = \frac{x}{15}$

$$\boxed{y = \frac{2}{3}x} \text{ .... (1)}$$

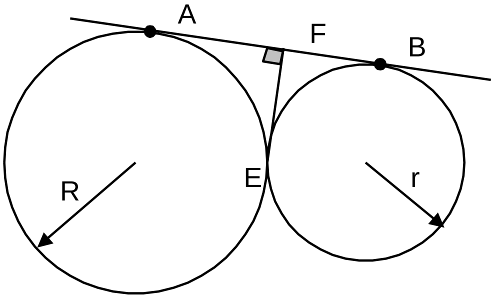
2) AF = 10-y
EC = 15-x

3) Perímetro (FBE) = Perímetro (AFEC)
2x + y = 10-y + x + 15-x + 15
2x + 2y = 40 ....(2)

4) Reemplazando (1) en (2)

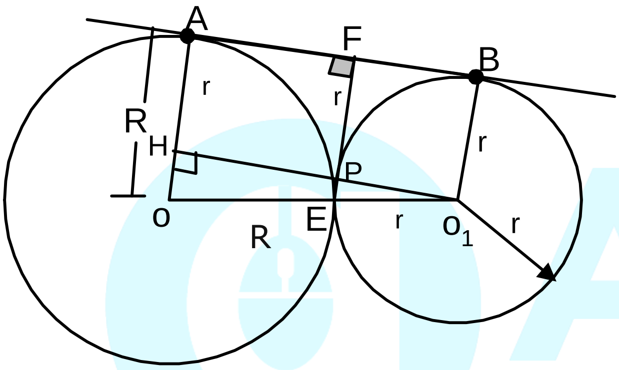
$\boxed{x = 12}$ Rpta. c

2. Calcular FE, si A,B y E son puntos de tangencia, R = 9, r = 4 (R y r son radios)



a) 36/13 b) 49/13 c) 63/13
d) 72/13 e) 84/13

Resolución



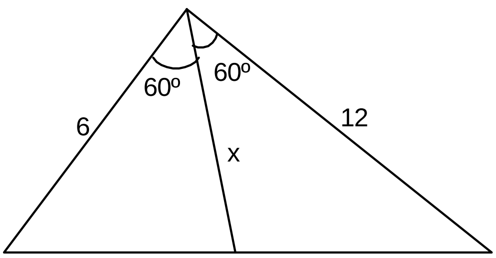
Incognita: FE = x

1) THALES: $\frac{PE}{HO} = \frac{r}{R+r}$

$\frac{x-r}{R-r} = \frac{r}{R+r} \rightarrow$ $\boxed{X = \frac{2Rr}{R+r}}$

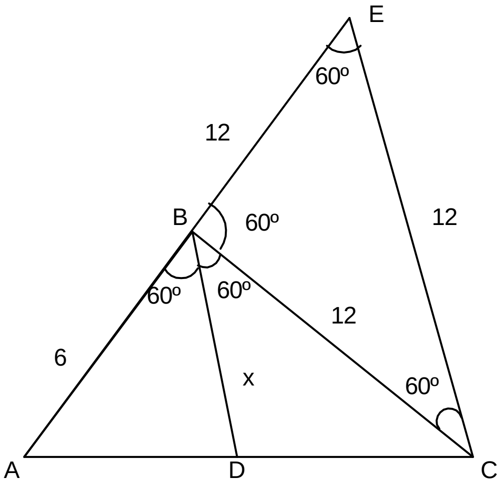
$X = \frac{2(9)(4)}{9+4} \rightarrow$ $\boxed{X = \frac{72}{13}}$ Rpta.

3. Calcular x



a) 6 b) 4 c) 5 d) 7 e) 2

Resolución

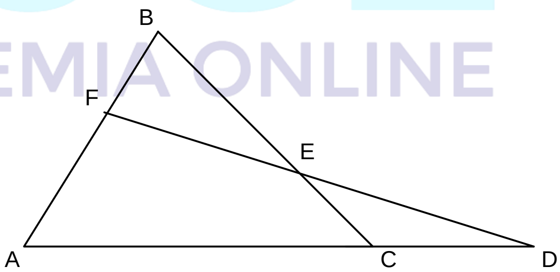


1. Trazar $\overline{CE} // \overline{BD}$

2. THALES $\frac{x}{12} = \frac{6}{6+12}$

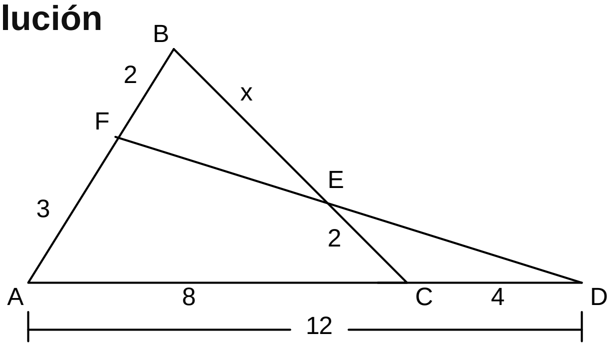
$\boxed{x = 4}$ Rpta

4. Calcular BE. Si: AF = 3; BF=EC=2; AC = 8, CD = 4



a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Resolución

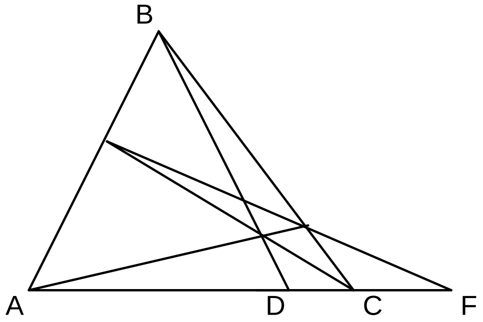


Teorema de Menelao

3 . x . 4 = 2 . 2 . 12

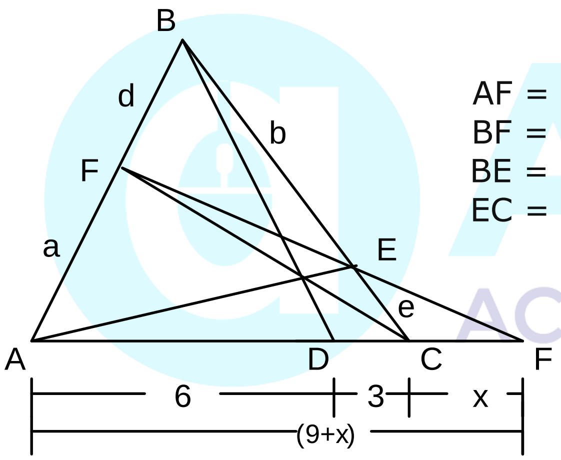
$\boxed{\mathbf{x = 4}}$ Rpta

5. Calcular CF. Si: AD=6; DC=3



a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Resolución:



AF = a
BF = d
BE = b
EC = e

MENELAO: a b x = d e (9 + x)

CEVA: a b 3 = d e 6

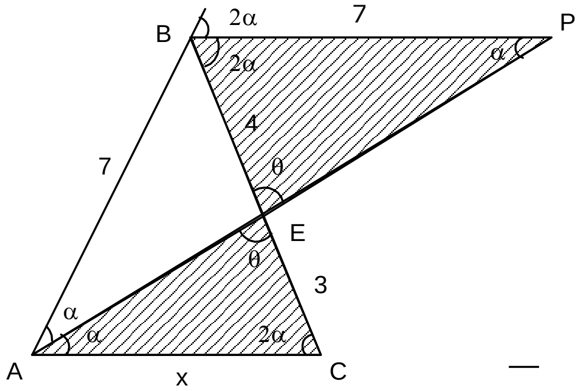
divido $\dfrac{x}{3} = \dfrac{9+x}{6}$

$\boxed{\mathbf{x = 9}}$ Rpta

6. En un triángulo isósceles ABC (AB=BC) se traza la bisectriz interior de A que intercepta a la bisectriz exterior de B en P y a BC en E. Si: BE = 4 y EC = 3. Calcular AC.

a) 4,25 b) 4,75 c) 5,25
d) 5,75 e) 6,25

Resolución



1) Dato AB = BC = 7

2) Dato $\overline{BP} // \overline{AB}$
AB = BP = 7

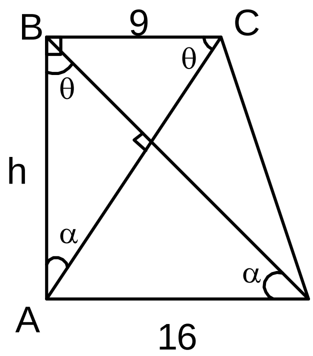
3) ΔAEC ~ Δ BEP
$\theta \to \underline{x} = \underline{7}$
$\alpha \to 3 \quad 4$

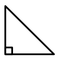
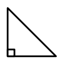
$\boxed{\mathbf{x = 5,25}}$ Rpta

7. Calcular la altura de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 9 y 16, además, sus diagonales son perpendiculares.

a) 10 b) 12 c) 15 d) 16 e) 25

Resolución



 ABC ~  BAD

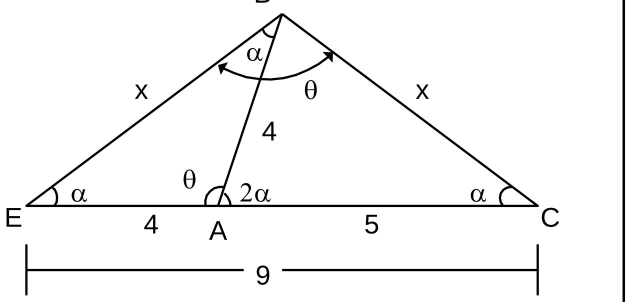
$\theta \to \underline{h} = \underline{16}$
$\alpha \to 9 \qquad h$
h² = 144

$\boxed{h = 12}$ Rpta.

8. En un triángulo ABC, AB = 4, AC=5 y $m\hat{A} = 2(m\hat{C}) < 90º$. Calcular BC.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Resolución



$\Delta EBC \sim \Delta EAB$

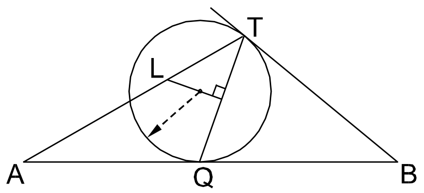
$$\begin{array}{l} \alpha \to \\ \theta \to \end{array} \frac{x}{9} = \frac{4}{x} \to \boxed{x = 6} \quad \text{Rpta}$$

EJERCICIOS

1. En un triángulo ABC, la mediatriz de AC corta a BC en P y a la prolongación de AB en Q. Si 2AB = 3BQ y BP = 3. Calcular PC.
A) 6 B) 7 C)7,5
D) 8 E) 9

2. Si AB = 7 y BC = 9 son los lados de un triángulo ABC, si la bisectriz interior de B determina sobre AC dos segmentos cuya diferencia de longitudes es 1. Hallar AC.
A 10 B) 8 C)8,5
D) 9,5 E) 10,5

3. En la figura AQ = QB, si LT=4; calcule LA. (T y Q son puntos de tangencia)



A)6 B)8 C)10
D)12 E) 9

4. En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BF y BE tal que los ángulos ABF, FBE y EBC miden 37°, 37° y 53° respectivamente. Calcular EC si AF = 4 y FE = 3.
A) 18 B) 17 C) 14
D) 16 E) 21

5. En un triángulo ABC, donde BC = 2AB, se traza la altura BH, tal que m∠HBC = 3m∠ABH. Si AH = 2, calcular HC.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

6. En un triángulo ABC, por el punto F de AB se traza FG paralelo a AC (G en BC) y luego se traza FP paralelo a AG (P en BG). Calcular CG si BP = 5 y PG = 3.
A) 3 B) 4,2 C)2,4
D) 3,6 E) 4,8

7. En un trapecio ABCD sobre AB y CD se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que PQ // BC // AD y 3QD = 5CQ. Hallar PQ si además BC = 2, AD = 10.
A) 4 B) 5 C) 6
D) 6,5 E) 8

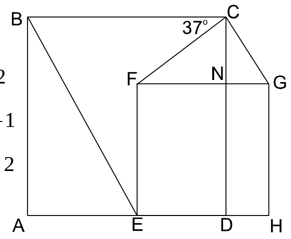
8. En un triángulo ABC se sabe que AC = 12, BC = 10 se traza la bisectríz interior CD y luego DM paralelo a AC (M en BC). Calcular DM.
A) 6 B) 5 C)5,5
D) 6,5 E) 60/11

9. En un triángulo ABC, se traza el paralelogramo AGDC (G es baricentro de la región triangular ABC). M es punto medio de $\overline{AC}$, si $\overline{AD}$ y $\overline{MD}$ intersecan a $\overline{BC}$ en E y F respectivamente, calcular: $\frac{AE}{ED} - \frac{MF}{FD}$.

A) 3/4 B) 2/3 C)3/2
D) 3/5 E) 2/5

10.Calcular NG, si FC=5, ABCD, EGEH son cuadrados y $\overline{BE} // \overline{CG}$

A) 2
B) 3
C) $\sqrt{13}-2$
D) $\sqrt{13}-1$
E) $\sqrt{15}-2$



11.En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior BD y en $\overline{BC}$ se ubica al punto E tal que $\overline{DE} // \overline{AB}$, calcular BC si: DE=3 y BC=3(AB)
A) 10 B)9 C) 8
D) 12 E)16

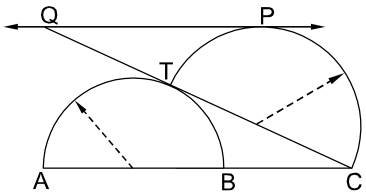
12.Se tiene un triángulo ABC en el cual la ceviana interior $\overline{AE}$ interseca a la bisectriz BD en N; si BN=ND; BE=4 y EC=12; calcule AB.

A) 8 B) 6 C) $5\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{6}$ E) $4\sqrt{5}$

13.Se tiene un paralelogramo ABCD tal que un punto de $\overline{AC}$ dista de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ 2u y 3u respectivamente; si AB=15. Calcule BC

A) 8 B) 10 C) 12
D) $6\sqrt{2}$ E) 16

14.Si: AB=10; BC= 8 y $\overline{PQ} // \overline{AC}$. Calcule QT (P y T son puntos de tangencia)



A) 8 B) 8,2 C)9,2
D) 9,6 E) 10

15.Se tiene un romboide ABCD; en $\overline{AD}$ se ubica al punto M tal que MD = 3(AM); si la distancia de M a $\overline{AB}$ es 6; calcule la distancia del punto medio de $\overline{MC}$ hacia $\overline{AB}$.

A) 18 B)15 C) 14
D) 20 E) 19

16.Se tiene un triángulo isósceles ABC de base AC en el cual se trazan las alturas BP y AL; $\overline{BP} \cap \overline{AL} = \{Q\}$; calcule PL si BQ=5 y QP=4.

A) 6 B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{6}$
D) $\sqrt{7}$ E) $3\sqrt{2}$

17.En un rectángulo ABCD en el lado BC se toman los puntos P y Q tal que BP = PQ = QC y en el lado AD se toman los puntos M y N tal que AM = MN = ND. La diagonal AC = 20 es interceptada en F y E por BN y DP. Calcular FE.

A) 5 B) 4 C) 2
D) 6 E) 3

18.En un triángulo ABC, una circunferencia que pasa por B y A corta en G a AC y en F a BC tal que la tangente que pasa por B es paralela a AC. Calcular AB si BF = 9 y FC = 16.

A) 15 B) 12 C) 18
D) 19 E) 16

19.En el cuadrilátero convexo ABCD, la recta que pasa por los puntos medios de AC y BD intercepta a AB y CD en P y Q respectivamente. Si AB = a y CD = b. Hallar BP/QD.

A) a/b B) b/a C) (a+b)/a
D) a/a+b E) b/a+b

RELACIONES MÉTRICAS

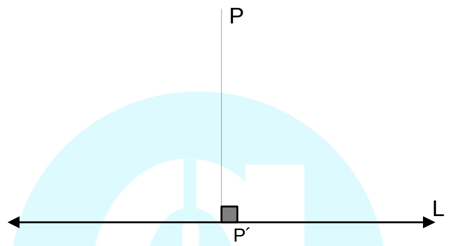
RELACIONES MÉTRICAS

Para el estudio de las relaciones métricas entre los elementos de los triángulos, es indispensable saber el concepto de proyección.

Proyección de un punto:

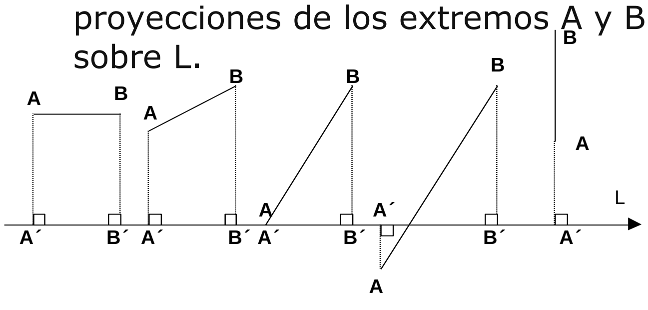
La proyección de un punto P sobre una recta L, es el pie de la perpendicular P´ bajada desde P hasta L.

$\overline{PP'}$ se llama proyectante L se llama eje de proyección.



Proyección de un segmento $\overline{AB}$ sobre una recta L

La proyección del segmento AB sobre la recta L es el segmento A´B´ cuyos extremos son las proyecciones de los extremos A y B sobre L.



Para hallar la proyección de un segmento sobre una recta, basta con bajar las perpendiculares desde sus extremos hasta la recta.

En la figura anterior, se muestran las proyecciones de un segmento AB sobre la recta L en las diferentes posiciones.

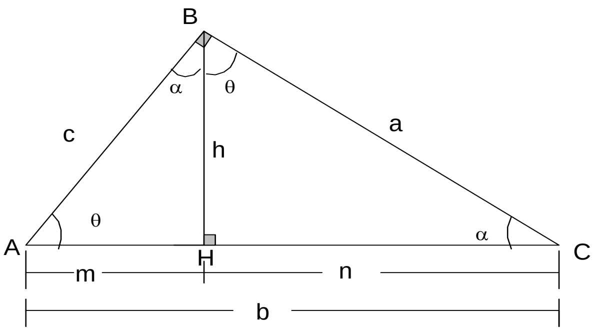
DEFINICIÓN

Se llama relación métrica entre varios segmentos a la relación que existe entre sus medidas con respecto a una misma unidad.

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Si en un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ correspondiente a la hipotenusa $\overline{AC}$, observaremos que:

* Los triángulos AHB, BHC y ABC son semejantes
* El segmento m es la proyección del cateto c sobre la hipotenusa.
* El segmento n es la proyección del cateto a sobre la hipotenusa.
* La hipotenusa b es la suma de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.
* La proyección de la hipotenusa sobre un cateto es este mismo cateto.
* La proyección de un cateto sobre el otro cateto es un punto que viene a ser el vértice del ángulo recto (B).



1º R. M.

BH es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa.

$$\boxed{h^2 = m.n}$$

2º R. M.

Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

$$\boxed{c^2 = b.m} \qquad \boxed{a^2 = b.n}$$

3º R.M. (Teorema de Pitágoras)

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$\boxed{c^2 + a^2 = b^2}$$

4º R.M.

La altura relativa a la hipotenusa es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.

$$\boxed{b.h. = c.a}$$

5º R.M.

La inversa del cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de los catetos.

$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}}$$

6º R.M.

La razón de los cuadrados de los catetos es igual a la razón de los segmentos que la altura determina en la hipotenusa.

$$\boxed{\frac{c^2}{a^2} = \frac{m}{n}}$$

Demostraciones

1º R. M. $\triangle$ AHB ~ $\triangle$ BHC

$$\begin{array}{l} \theta \to \\ \alpha \to \end{array} \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m.n} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

2º R.M. $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ AHB

$$\begin{array}{l} \alpha \to \\ 90º \to \end{array} \frac{c}{b} = \frac{m}{c} \Rightarrow \boxed{c^2 = b.m} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

$\triangle$ ABC ~ $\triangle$ BHC

$$\begin{array}{l} \theta \to \\ 90º \to \end{array} \frac{a}{b} = \frac{n}{a} \Rightarrow a^2 = \boxed{b.n} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

3º R.M. $c^2 = b.m$

$a^2 = b \,.\, n$

suma $c^2 + a^2 = \boxed{b.m + b.n}$

$c^2 + a^2 = b.(m+n) \Rightarrow c^2 + a^2 = b^2$ L.q.q.d.

4º R.M. △ABC ~ △BHC

$$\begin{matrix} 90º \rightarrow \\ \alpha \rightarrow \end{matrix} \frac{b}{c} = \frac{a}{h} \Rightarrow \boxed{b.h = c.a} \quad \text{L.q.q.d.}$$

5º R.M. $c^2 = b.m \Rightarrow \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{b.m}$

$$a^2 = b.n \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b.n}$$

suma $\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)$

$m.n. = h^2$

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b}\left(\frac{m+n}{m.n}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{h^2}}$$

6º R.M. $c^2 = b.m.$

$a^2 = b.n.$

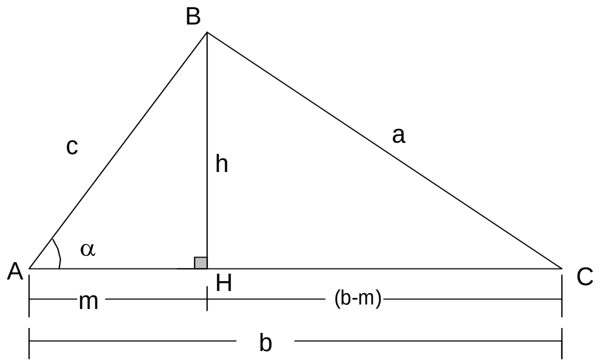
divido $\boxed{\dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{m}{n}}$ L.q.q.d.

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1º Teorema de Euclides**:**

El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos del doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

$\alpha < 90º$ $\boxed{\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm}}$



Demostración

Teorema de Pitágoras

△ **BHC $a^2 = h^2 + (b - m)^2$**

△ **AHB $c^2 = h^2 + m^2$**

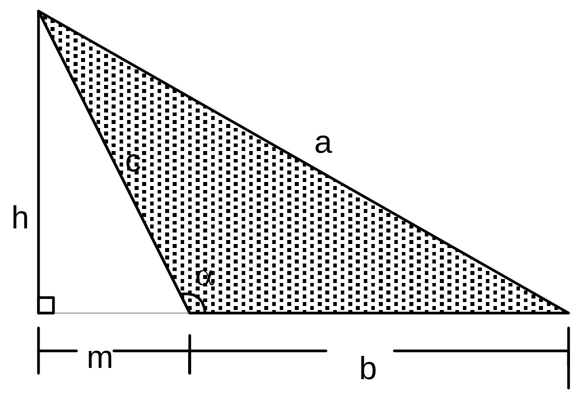
Resta $a^2 - c^2 = b^2 - 2bm$

$\boxed{\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm}}$ **L.q.q.d**

2do. Teorema de Euclides

El cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados más el doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

$\alpha > 90º$ $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bm}$



Demostración

Teorema de Pitágoras

△ **BHC $a^2 = h^2 + (b + m)^2$**

△ **AHB $c^2 = h^2 + m^2$**

Resta $a^2 - c^2 = b^2 + 2bm$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bm}$$

NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO

Sean a, b y c, las longitudes de los lados de un triángulo ABC, con el lado mayor de longitud a.

Si:

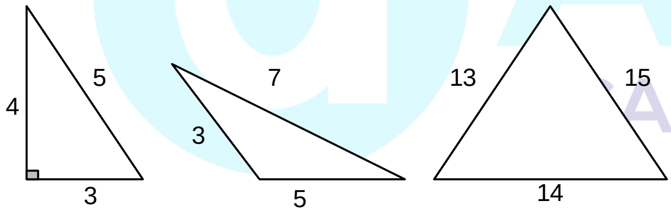
$a^2 = b^2 + c^2$ entonces ΔABC es rectángulo

Si:

$a^2 > b^2 + c^2$ entonces ΔABC es obtusángulo

Si:

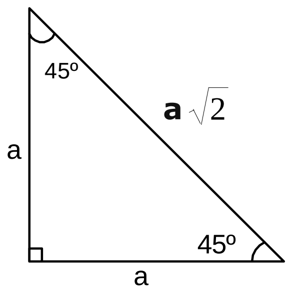
$a^2 < b^2 + c^2$ entonces ΔABC es acutángulo

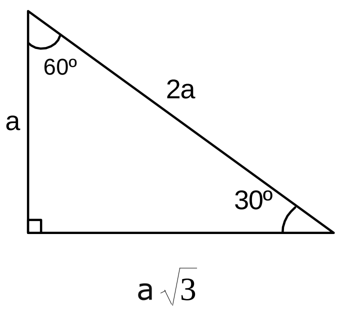


$5^2 = 3^2+4^2$ $7^2 > 3^2+5^2$ $15^2 < 13^2+14^2$

Rectángulo Obtusángulo Acutángulo

NOTA



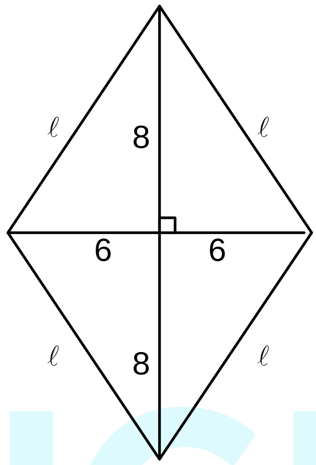


PROBLEMAS RESUELTOS

1. Las diagonales de un rombo mide 12cm y 16cm. El lado del rombo mide:

a) 9cm b) 10cm c) 11cm
d) 12cm e) 13cm

Resolución



<u>Pitágoras</u>

$\ell^2 = 6^2 + 8^2$

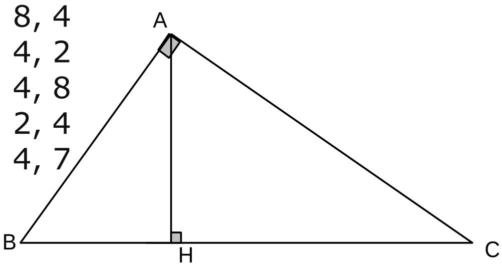
$\ell^2 = 100$

$\ell = \sqrt{100}$

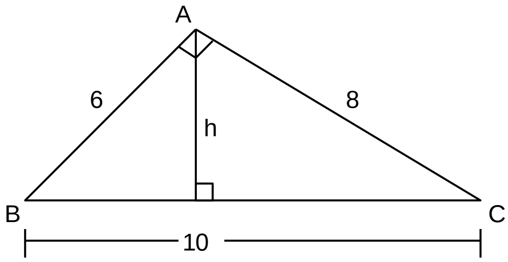
$\boxed{\ell = 10}$ **Rpta. b**

2. Calcular el valor de la altura AH del triángulo rectángulo BAC, si AB = 6 y AC = 8.

a) 8, 4
b) 4, 2
c) 4, 8
d) 2, 4
e) 4, 7



Resolución



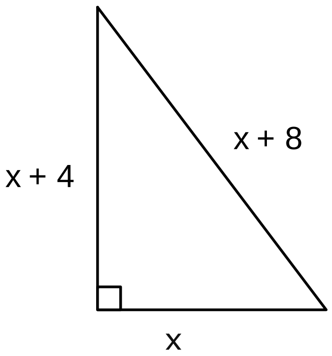
$10h = 6 \times 8$
$10h = 48$

$\boxed{h = 4{,}8}$ **Rpta. c**

3. Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética cuya razón es 4 cm. Hallar la medida de la hipotenusa.

a) 12cm b) 16 cm c) 20 cm
d) 24 cm e) 30 cm

Resolución



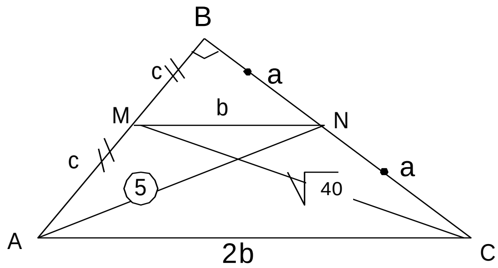
Pitágoras
$x^2 + (x+4)^2 = (x+8)^2$
$(x+4)^2 = (x+8)^2 - x^2$
$(x+4)^2 = (2x+8) \cdot 8$
$(x+4)\,(x+4) = 16(x+4)$
$x+4 = 16 \rightarrow x = 12$

$\boxed{x + 8 = 20}$ **Rpta. c**

4. Las medianas de un triángulo rectángulo trazadas a partir de los vértices de los ángulos agudos mide 5 y $\sqrt{40}$. Calcular la medida de la hipotenusa.

a) $\sqrt{13}$ b) $2\sqrt{13}$ c) 10
d) $2\sqrt{40}$ e) 13

Resolución



<u>Pitágoras</u>

MBC . $c^2 + (2a)^2 = \sqrt{40}^2$
ABN $(2c)^2 + a^2 = 5^2$

Suma $5c^2 + 5a^2 = 65$

Quinta
$\underbrace{c^2 + a^2}_{b^2} = 13$
$b^2 = 13$
$b = \sqrt{13}$

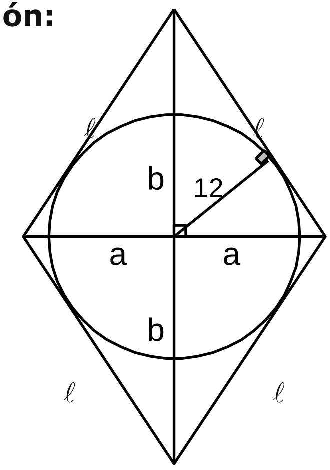
$AC = 2b$

$\boxed{AC = 2\sqrt{13}}$ **Rpta. b**

5. En un rombo la suma de las medidas de las diagonales es 70 cm y el radio del círculo inscrito mide 12 cm. Hallar la medida del lado.

a) 16 cm b) 20 cm c) 24 cm
d) 25 cm e) 30 cm

Resolución:

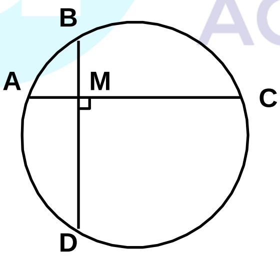


Dato $2a + 2b = 70$
Mitad $a + b = 35$
Elevando al cuadrado
$(a+b)^2 = 35^2$
$\underbrace{a^2 + b^2}_{\ell^2} + 2\underbrace{ab}_{12\ell} = 1225$
$\ell^2 + 2(12\ell) = 1225$
$(\ell + 49)(\ell - 25) = 0$

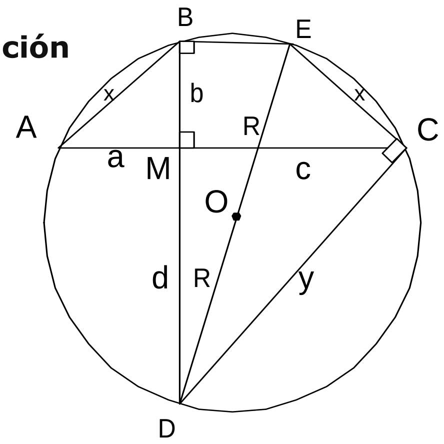
$\boxed{\ell = 25}$ **Rpta. d**

6. En la figura mostrada. Hallar la medida del radio de la circunferencia, si: $AM^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 400cm^2$

a) 10 cm
b) 15 cm
c) 20 cm
d) 25 cm
e) 40 cm



Resolución



Dato $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 400$
Incógnita: R

1. Trazar $\overline{BE} // \overline{AC}$
2. Trapecio Isósceles ABEC
   AB = EC = x
3. Conjugados internos

   $90º + m\widehat{MBE} = 180º$

   $m\widehat{MBE} = 90º$

   Entonces $\overline{DE}$ es diámetro

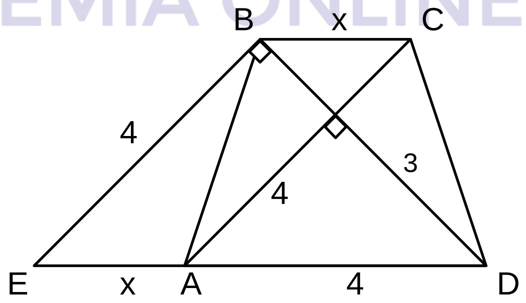
4. ⊿ DCE Pitágoras
   $(2R)^2 = x^2 + y^2$
   $4R^2 = \underbrace{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2)}_{400}$
   $4R^2 = 400$

   $\boxed{R = 10}$ **Rpta. a**

7. Se tiene un trapecio ABCD cuyas diagonales se cortan perpendicularmente; si la base mayor AD es igual a la diagonal AC e igual a 4. Calcular la base menor BC, si BD = 3

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolución



1) Trazar $\overline{BE} // \overline{AC}$

   $m\widehat{EBD} = 90º$ correspondientes
   BE = AC = 4
   EA = BC = x

2) ⊿ EBD Pitagórico

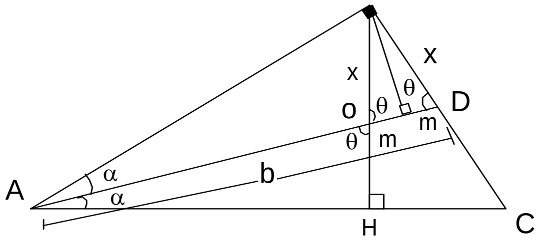
   $x + 4 = 5$

   $\boxed{x = 1}$ **Rpta. a**

8. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B se trazan la bisectriz interior AD del ángulo A y la altura BH cuya intersección es el punto O. Calcular OB, si AD.OD=50

a) 6 b) 5 c) 4 d) 8 e) 9

Resolución



Dato:

1. AD . OD = 50
b (2m) = 50
bm = 25

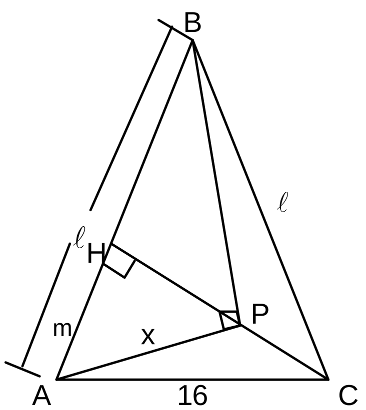
2. R. Métricas ◺ABD
x^2 = bm
x^2 = 25

$\boxed{x = 5}$ **Rpta. b**

9. Se tiene un triángulo isósceles ABC (AB = BC). Sobre la altura CH se considera un punto P de manera que el ángulo APB=90º; si AC = 16. Calcular PA

a) 8 b) 6 c) $8\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{2}$ e) 4

Resolución



1) ◺ APB R. METRICAS
$X^2 = \ell m$ ... (I)

2) Δ ABC Euclides
$\ell^2 = \ell^2 + 16^2 - 2\ell m$

$2\ell m = 16^2$

$\ell m = 128$.... (II)

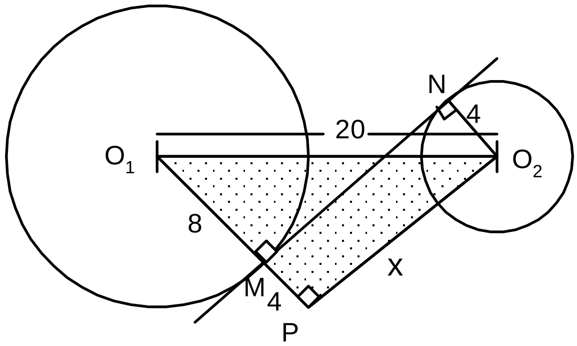
3) II en I
$X^2 = 128$
$X = \sqrt{64 \text{x} 2}$

$\boxed{x = 8\sqrt{2}}$ **Rpta. c**

10. En la siguiente figura, calcular la medida de la tangente común MN a ambas circunferencias, sabiendo que la distancia entre los centros es 20 m y que el radio mayor mide 8m y el radio menor mide 4 m

a) 12m b) 15m c) 16m
d) 9m e) 10m

Resolución



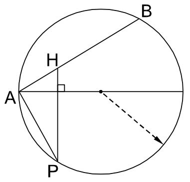
Pitágoras ◺ $O_1 PO_2$
$X^2 + 12^2 = 20^2$

$\boxed{X = 16}$ Rpta.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si (AB)(AH)=32; calcule AP

A) 16
B) 4
C) $4\sqrt{2}$
D) 6
E) $3\sqrt{6}$

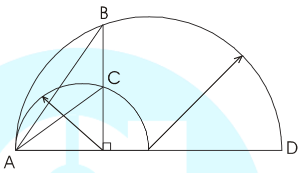


2. Se tiene un cuadrilátero ABCD cuyas diagonales son perpendiculares; m∡BCD = 90º y BD = AD; calcule AB/BC

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}/2$

3. Si: AB = 4; calcule AC

A) 2
B) $\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$
E) $\sqrt{6}$

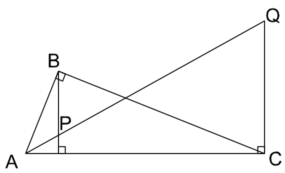


4. Se tiene una semicircunferencia de diámetro AB y centro O; en $\overline{AO}$ se ubica el punto Q tal que: $(AQ)^2 + (QB)^2 = 90$; luego se traza la cuerda CD la cual es paralela a $\overline{AB}$; si CD=6; calcule la distancia de Q hacia el punto medio de $\overline{CD}$.

A) 6 B) $3\sqrt{6}$ C) $6\sqrt{7}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 4

5. Si: 5(AB)=2(BC) y AP=8; calcule PQ.

A)16
B)32
C) 45
D)60
E) 50

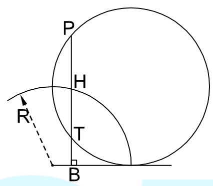


6. Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B; con diámetro BC se traza una semicircunferencia que interseca a $\overline{AC}$ en D; en el arco DC se ubica al punto F tal que: $\overline{BF} \cap \overline{DC} = \{E\}$; AD=3, DE=3 y EC=2; calcule EF.

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{5}$ D) 1 E) 1,8

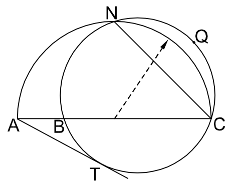
7. Si: PH = HT = 3 y TB = 2; calcule: R
(C: punto de tangencia)

A) 41/8
B) 5
C) 47/5
D) 43/7
E) 29/3



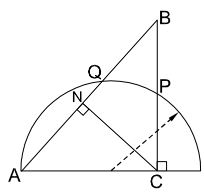
8. Si: $\overset{\frown}{NC}$ = 6; BC = 3(AB) y m$\overset{\frown}{BN}$ = m$\overset{\frown}{NQC}$; calcular AT. (T: punto de tangencia)

A) $2\sqrt{6}$
B) $6\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$
E) $5\sqrt{2}$



9. Si: (AB)(QN)=24; calcule PC

A) 4
B) $2\sqrt{6}$
C) 3
D) $4\sqrt{5}$
E) $6\sqrt{2}$



10.En un triángulo rectángulo ABC recto en B se ubica al punto M en $\overline{BC}$ y a N en $\overline{AC}$ tal que BM=MC; m∡MNC=90º; AN=5 y NC=4; calcule AM

A) $4\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{2}$ D) 7 E) $3\sqrt{5}$

11.Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B en el cual se traza la ceviana BQ tal que: AQ=6; QC=2 y BQ=3, calcule BC.

A) 4 B) $\sqrt{6}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{2}$

12.Se tiene un cuadrilátero inscrito ABCD tal que: AB=2; BC = CD = $2\sqrt{3}$ y $\overline{AD}$ es diámetro; calcule el radio.

A)3 B) 2,2 C) 1,6 D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

13.En un triángulo ABC; (AB=c; BC=a; AC=b y m∡ABC=27º); calcular la m∡BAC. Si $a^2 - b^2 = bc$

A) 84º B) 36º C) 42º
D) 45º E) 54º

14.En un trapecio ABCD ($\overline{BC}//\overline{AD}$) cuya base media mide 2; calcular DM si M es punto medio de $\overline{AB}$ y $(CD)^2 - 2(MC)^2 = 2$

A) 3 B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{6}$
D) $\sqrt{5}$ E) 2

15.En un triángulo ABC se traza la mediana BM y en ella se ubica al punto D tal que DC = AB; $(BC)^2 - (AD)^2 = 18$ y MD = 4; calcule: BD.

A) 2 B) 3 C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

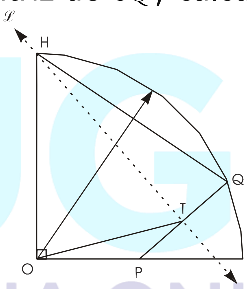
16.Se tiene un cuadrante AOB (AO = OB), en $\overline{OB}$ se ubica al punto N y se traza la semicircunferencia de diámetro ON que interseca a $\overline{AN}$ en H; si AH = 9 y HN = 4; calcule HB.

A) $3\sqrt{5}$ B) 7 C) $6\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{3}$ E) $\sqrt{71}$

17.En un triángulo ABC las medianas tienen por longitudes: 9, 12 y 15; calcule la longitud del lado menor de dicho triángulo.

A) 10 B) 8 C) 9 D) 12 E) 6

18.Si: PQ = 2; HQ = 4 y $\overline{L}$ es la mediatriz de $\overline{PQ}$; calcule OT



A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{14}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{2}$

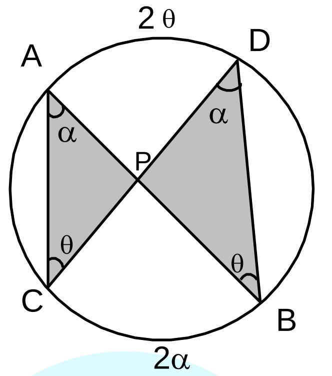
19.Se tiene un triángulo ABC; (AB=14; AC=13 y BC = 15); con diámetro AB se traza una semicircunferencia en la región exterior, la cual interseca a la prolongación de la mediana CN en el punto Q; calcule la distancia de Q hacia $\overline{AB}$

A) $\frac{42}{37}\sqrt{37}$ B) 6 C) $3\sqrt{2}$
D) 4 E) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE LAS CUERDAS

Si en una circunferencia se tiene dos cuerdas secantes, el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las medidas de los segmentos de la otra.



PA x PB = PC x PD

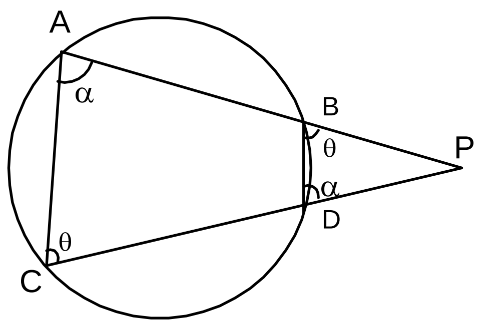
Demostración:
$\Delta APC \sim \Delta BDP$ (AAA)

$\alpha \rightarrow \theta \rightarrow \quad \frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD}$

PA x PB = PC x PD **Lqqd**

TEOREMA DE LAS SECANTES

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, los productos de las medidas del total de la secante y su parte externa son iguales.



PA x PB = PC x PD

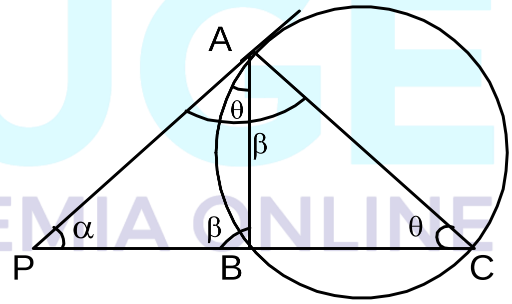
Demostración:
$\Delta APC \sim \Delta BPD$ (AAA)

$\theta \rightarrow \alpha \rightarrow \quad \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$

PA x PB = PC x PD **Lqqd**

TEOREMA DE LA TANGENTE

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una secante y un tangente, la medida de la tangente es media proporcional entre las medidas del total de la secante y su parte externa.



PA^2 = PB x PC

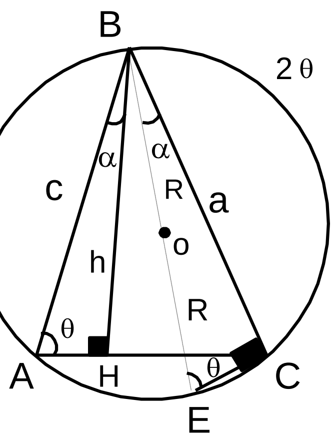
Demostración
$\Delta APC - \Delta BPA$ (AAA)

$\theta \rightarrow \beta \rightarrow \quad \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA}$

PA^2 = PB x PC **Lqqd**

TEOREMA DEL PRODUCTO DE LOS LADOS

En un triángulo inscrito en una circunferencia, el producto de las medidas de dos lados cualesquiera es igual al producto de las medidas del diámetro y la altura relativa al tercer lado.

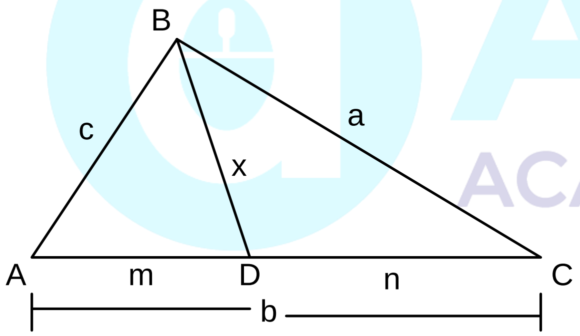


$$\boxed{AB \times BC = 2R \times BH}$$

$$\boxed{h = \frac{a.c.}{2R}}$$

TEOREMA DE STEWART

Si en un triángulo se traza una ceviana interior se cumple que:

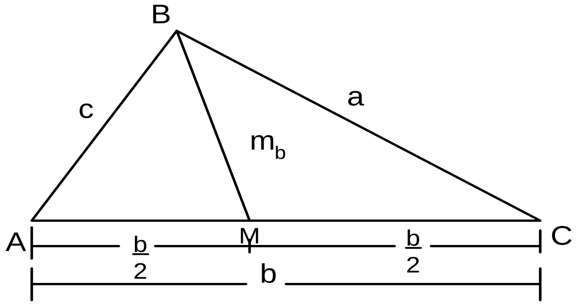


$$\boxed{bx^2 = a^2m + c^2n - bmn}$$

TEOREMA DE LA MEDIANA

En todo triángulo, la suma de los cuadrados de dos lados cualquiera es igual doble del cuadrado de la mediana relativa al tercer lado, más la mitad del cuadrado de este mismo lado.

Si en un triángulo se traza una mediana se cumple que:



BM : Mediana
BM : m_b

$$\boxed{a^2 + c^2 = 2m_b{}^2 + \frac{b^2}{2}}$$

Análogamente

$$\boxed{a^2 + b^2 = 2m_c{}^2 + \frac{c^2}{2}}$$

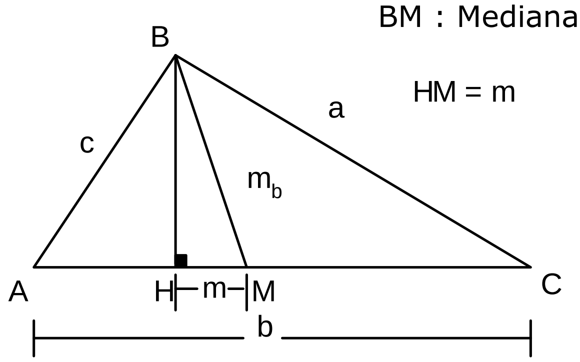
$$\boxed{b^2 + c^2 = 2m_a{}^2 + \frac{a^2}{2}}$$

TEOREMA DE LA PROYECCIÓN DE LA MEDIANA

La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al doble producto del tercer lado por la proyección de la mediana sobre el tercer lado.

BM : Mediana

HM = m

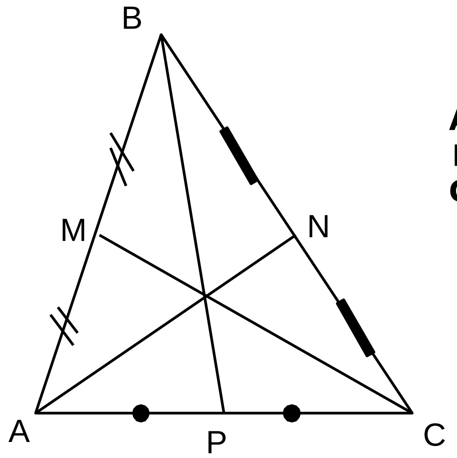


m : Proyección de la mediana

$$\boxed{a^2 - c^2 = 2bm}$$

TEOREMA DE BOOTH

En todo triángulo se cumple que la razón entre la suma de los cuadrados de las medianas con la suma de los cuadrados de sus lados es igual a ¾



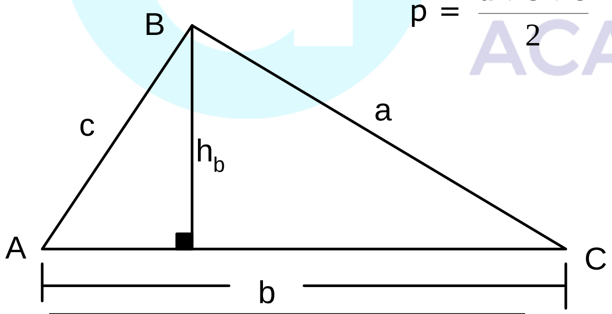
AN = m_a
BP = m_b
CM = m_c

$$\boxed{\frac{m_a^{\,2}+m_b^{\,2}+m_c^{\,2}}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{4}}$$

TEOREMA DE HERON
(Cálculo de Altura)

p = semiperímetro

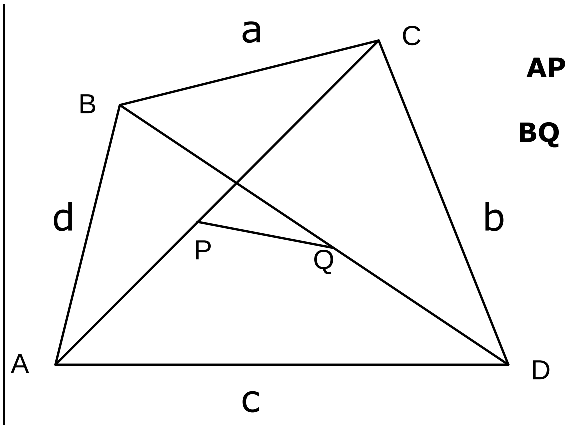
$$p=\frac{a+b+c}{2}$$



$$\boxed{h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

TEOREMA DE EULER

En todo cuadrilátero (convexo, cóncavo alabeado), la suma de los cuadrados de las medidas de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales más cuatro veces el cuadrado de la medida del segmento que une los puntos medios de las diagonales.



AP = PC

BQ = QD

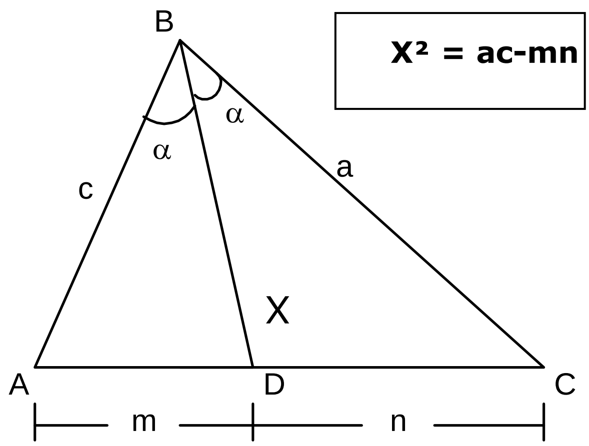
$$\boxed{a^2+b^2+c^2+d^2=AC^2+BD^2+4PQ^2}$$

COROLARIO.

En todo trapecio la suma de los cuadrados de las medidas de los lados no paralelos más el doble del producto de las medidas de las bases es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales.

CÁLCULO DE LA BISECTRIZ

BISECTRIZ INTERIOR
(BD = X)

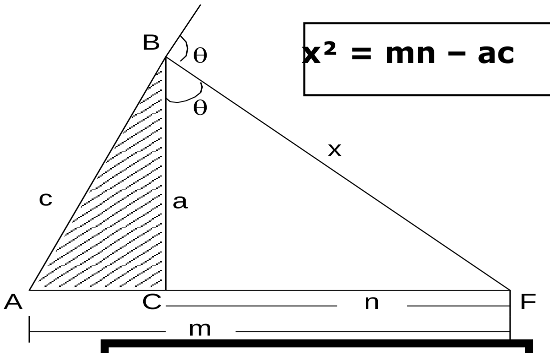


$$\boxed{X^2 = ac-mn}$$

$$\boxed{x=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}}$$

AD = m, DC = n

BISECTRIZ EXTERIOR
(BF = X)



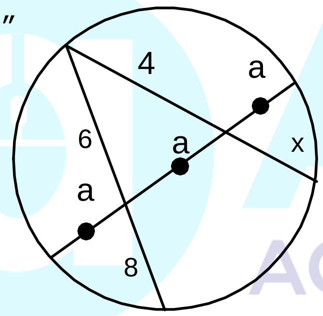
$\boxed{x^2 = mn - ac}$

$$\boxed{x = \frac{2}{c-a}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}}$$

AF = m, CF = n

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar "x"



a) 6
b) 8
c) 12
d) 9
e) 7

Resolución

Teorema de las cuerdas

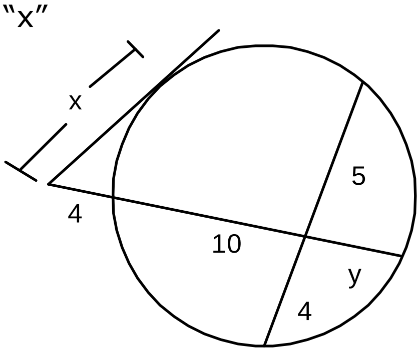
$4x = a(2a)$

$\underline{6(8) = a(2a)}$

Igualando $4x = 6(8)$

$\boxed{X = 12}$ **Rpta. c**

2. Hallar "x"



a) 6
b) 9
c) 5
d) 8
e) 10

Resolución

1) Teorema de las cuerdas

$10y = 5(4)$

$y = 2$ .... (1)

2) Teorema de la tangente

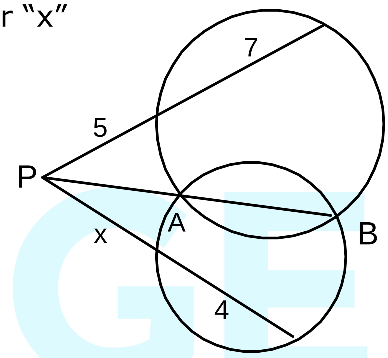
$x^2 = 4(14 + y)$ ..... (2)

3) Reemplazando (1) en (2)

$x^2 = 4\,(14 + 2)$

$\boxed{x = 8}$ **Rpta. d**

3. Hallar "x"



a) 4
b) 3
c) 8
d) 9
e) 6

Resolución

Teorema de las Secantes

$5(5+7) = PA.PB$

$\underline{x(x+4) = PA.PB}$

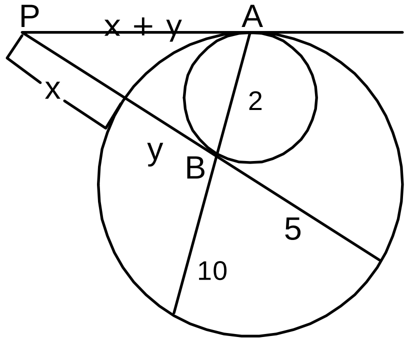
Igualando

$X(x+4) = 5(12)$

$X(x+4) = 6(10)$

$\boxed{X = 6}$ **Rpta. e**

4. Hallar "x"



a) 8
b) 16
c) 4
d) 12
e) 6

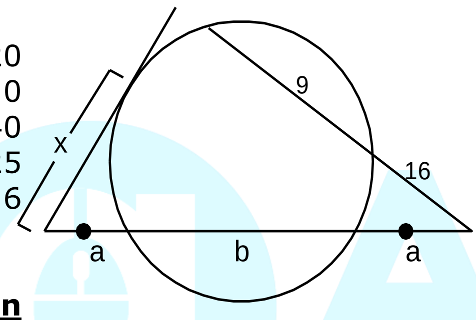
Resolución

1) Teorema de las cuerdas
$5y = 10(2)$
$y = 4$ .... (1)
2) Propiedad de Tangentes
$PA = PB = x + y$ .... (2)
3) Teorema de la Tangente
$PA^2 = x\,(x+y+5)$ .... (3)
4) Reemplazando (2) en (3)
$(x + y)^2 = x\,(x+y+5)$ ....(4)
5) Reemplazando (1) en (4)
$(x+4)^2 = x(x + 4 + 5)$
$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 9x$

$\boxed{16 = x}$ **Rpta. b**

5. Hallar "x"

a) 20
b) 10
c) 40
d) 25
e) 16



Resolución

1) Teorema de la tangente
$x^2 = a(a+b)$ .... (1)

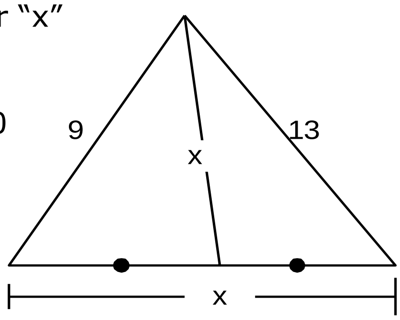
2) Teorema de la secante
$16(16+9) = a(a+b)$ .....(2)

3) Igualando
$x^2 = 16(16+9)$
$x = 4(5)$

$\boxed{x = 20}$ **Rpta. a**

6. Hallar "x"

a) 9
b) 10
c) 8
d) 6
e) 7



Resolución

Teorema de la mediana

$$9^2 + 13^2 = 2x^2 + \frac{x^2}{2}$$

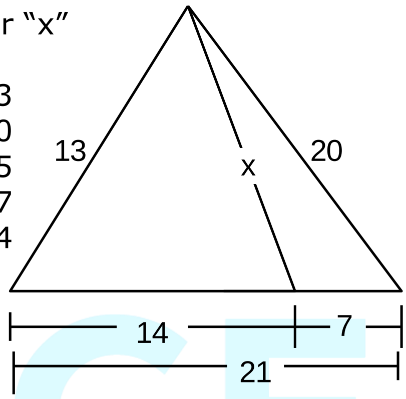
$$250 = \frac{5x^2}{2}$$

$5x^2 = 500$

$\boxed{x = 10}$ **Rpta. b**

7. Hallar "x"

a) 13
b) 10
c) 15
d) 17
e) 14



Resolución

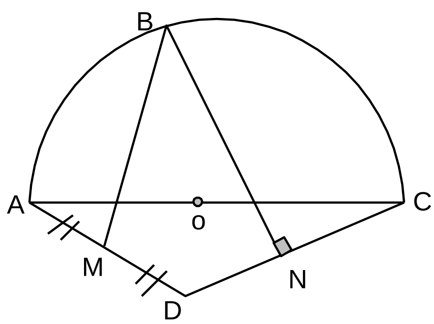
1) Teorema de Stewart
$21x^2=14(20)^2+7(13)^2-14(7)(21)$

Sétima
$3x^2 = 2(20)^2 + 13^2 - 14(21)$
$3x^2 = 800 + 169 - 294$
$3x^2 = 675$
$x^2 = 225$

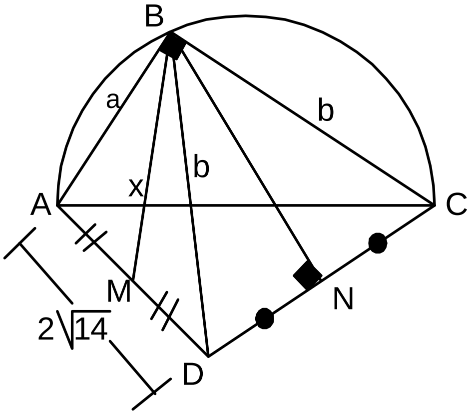
$\boxed{x = 15}$ **Rpta. c**

8. Hallar BM. Si: el diámetro AC mide 10 y $AD = 2\sqrt{14}$, $AM = MD$, $DNA = NC$

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9



Resolución



1) Dato AC = 10
2) Pitágoras ⊿ ABC
$a^2 + b^2 = 10^2$ .... (1)
3) Teorema de la mediana

$$a^2 + b^2 = 2x^2 + \frac{\left(2\sqrt{14}\right)^2}{2} \text{....(2)}$$

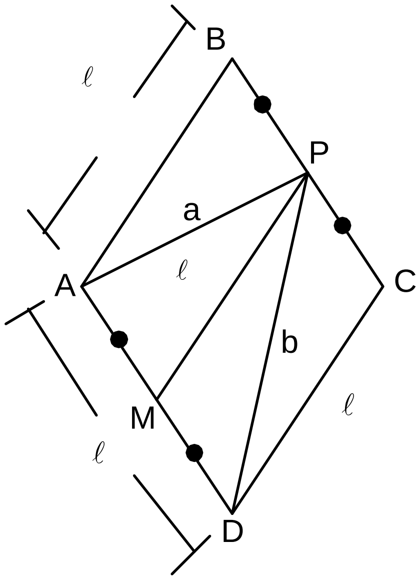
4) Reemplazando (1) en (2)
$10^2 = 2x^2 + 28$

$\boxed{x = 6}$ **Rpta. b**

9. En un rombo ABCD se ubica el punto medio P de $\overline{BC}$, tal que $AP^2 + PD^2 = 250$. Hallar AB

a) 6 b) 8 c) 10 d) 15 e) 20

Resolución



1) Dato $AP^2 + PD^2 = 250$
$a^2 + b^2 = 250$ .... (1)
2) Teorema de la mediana

$$a^2 + b^2 = 2\ell^2 + \frac{\ell^2}{2} \text{... (2)}$$

3) Reemplazando (1) en (2)

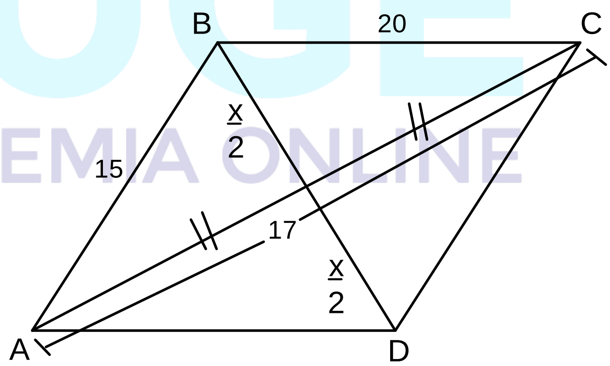
$$250 = \frac{5\ell^2}{2}$$

$\boxed{\ell = 10}$ **Rpta. c**

10. Los lados de un paralelogramo miden 15 y 20, la diagonal mide 17. Calcular la medida de la otra diagonal

a) 24 b) 27 c) 30 d) 31 e) 36

Resolución



Teorema de la mediana ΔABC

$$15^2 + 20^2 = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{17^2}{2}$$

$$225 + 400 = \frac{x^2}{2} + \frac{289}{2}$$

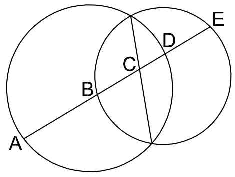
Por 2:

$1250 = x^2 + 289$
$961 = x^2$

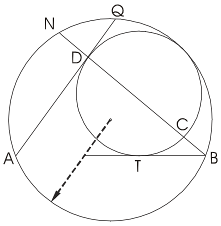
$\boxed{x = 31}$ **Rpta. d**

PROBLEMAS PROPUESTOS

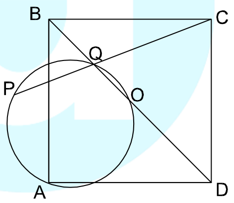
1. Si: AB = 9; 2(BC)=3(CD), calcule DE.
   A) 9
   B) 6
   C) 4
   D) 5
   E) $3\sqrt{2}$



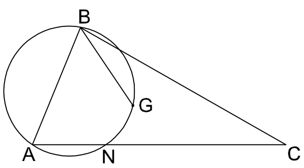
2. Si: QD = 1; TB = 2 y ND = CB; calcule AD (D y T son puntos de tangencia).
   A) 3
   B) 5
   C) $2\sqrt{5}$
   D) 4
   E) $2\sqrt{3}$



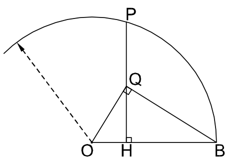
3. Si O es el centro del cuadrado ABCD; PQ = 2 y QC = 3; calcule AB.
   A) $\sqrt{5}$
   B) $\sqrt{10}$
   C) $\sqrt{15}$
   D)4
   E) $3\sqrt{6}$



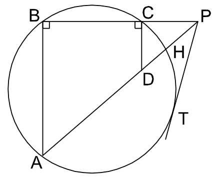
4. Si G es baricentro de la región triangular ABC; $(NC)^2 - (AN)^2 = 12$. calcule BG.
   A) $\sqrt{2}/2$
   B)2
   C) $\sqrt{6}$
   D) $2\sqrt{2}$
   E)4



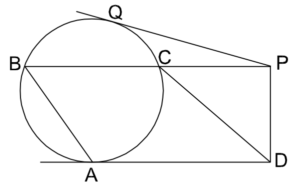
5. Si PQ = QH = 2; calcule QB.
   A) 3
   B) $2\sqrt{3}$
   C) $2\sqrt{2}$
   D) $\sqrt{5}$
   E) $\sqrt{7}$



6. Si: DH = HP y PT = 4; calcule: (AB)(CD). (T: punto de tangencia)
   A) 10
   B)16
   C)14
   D)12
   E) $8\sqrt{2}$

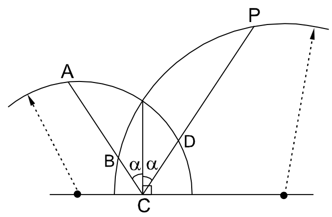


7. Si: ABCD es un romboide; AD = 6; A y Q son puntos de tangencia; calcule PQ. PD⊥AD
   A) $2\sqrt{3}$
   B) $4\sqrt{2}$
   C) $3\sqrt{3}$
   D)3
   E)4

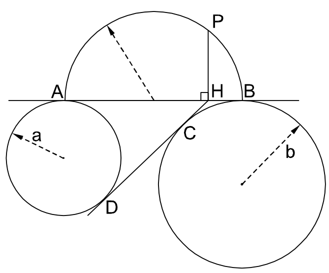


8. En el lado AC de un triángulo equilátero ABC se ubica al punto P; luego se traza una circunferencia tangente a $\overline{AC}$ en P y que pasa por B; además interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en R y T; calcule RT si AP=6 y PC=3.
   A) 6
   B) $5\sqrt{3}$
   C) 7
   D) $6\sqrt{2}$
   E) $4\sqrt{5}$

9. Del gráfico, calcule $\frac{(AC)(CD)}{(CP)(BC)}$.
   A) 1
   B) 1:5
   C) 2:3
   D) 2:5
   E) 4:5



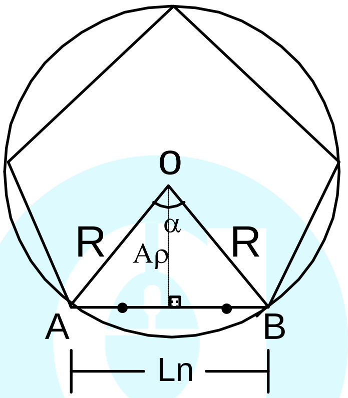
10. Si A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule PH en función de a y b
    A) $\sqrt{ab}$
    B) $2\sqrt{ab}$
    C) $3\sqrt{ab}$
    D) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$
    E) $\frac{2}{3}\sqrt{ab}$



POLÍGONOS REGULARES PERÍMETROS

POLIGONO REGULAR: Un polígono regular es aquel que es equilátero y equiángulo a la vez. Todo polígono regular es inscriptible y circunscriptible.

Ahora vamos a estudiar al polígono regular inscrito en una circunferencia tal como se muestra en el gráfico inferior, para lo cual se dan las siguientes definiciones.



CENTRO (O)

El centro de un polígono regular coincide con el centro de la circunferencia circunscrita al polígono.

RADIO (R)

Es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono.

TRIANGULO ELEMENTAL ΔAOB

Es el formado por dos radios y un lado del polígono.

L_n: Es el lado del polígono regular de "n" lados.

Ap: Es el apotema del polígono regular,

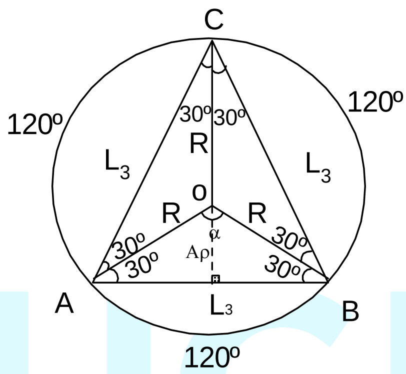
α : Es el ángulo central del polígono regular.

$$\left(\alpha = \frac{360^o}{n}\right)$$

PRINCIPALES POLIGONOS REGULARES

A continuación se presentan los lados y apotemas de los polígonos regulares así como las medidas de sus ángulos centrales.

1. Triángulo Equilátero

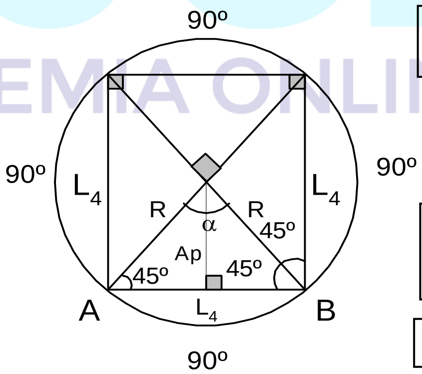


$$\boxed{L_3 = R\sqrt{3}}$$

$$\boxed{Ap = \frac{R}{2}}$$

$$\boxed{\alpha = 120^o}$$

2. Cuadrado

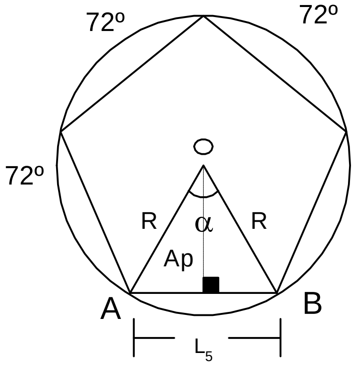


$$\boxed{L_4 = R\sqrt{2}}$$

$$\boxed{Ap = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boxed{\alpha = 90^o}$$

3. Pentágono Regular

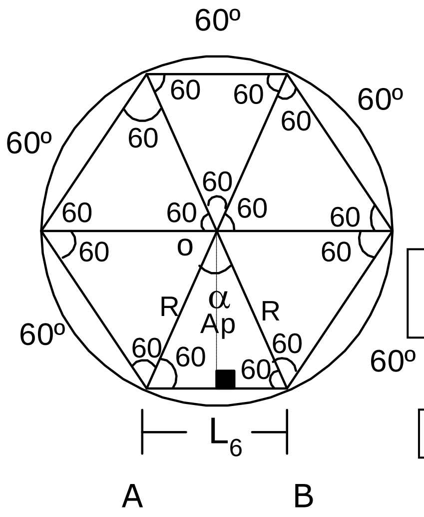


$$\boxed{L_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{Ap = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)}$$

$$\boxed{\alpha = 72^o}$$

4. Hexágono Regular

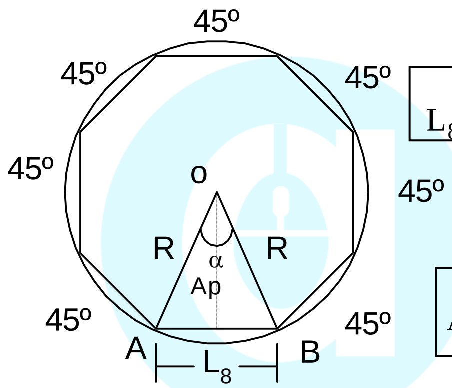


$$L_6 = R$$

$$Ap = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 60º$$

5. Octógono Regular

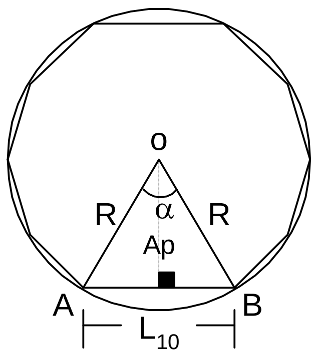


$$L_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$Ap = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\alpha = 45º$$

6. Decágono Regular

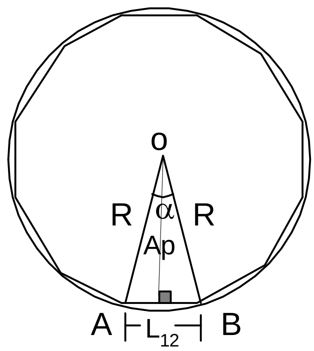


$$L_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$Ap = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\alpha = 36º$$

7. Dodecágono Regular



$$L_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

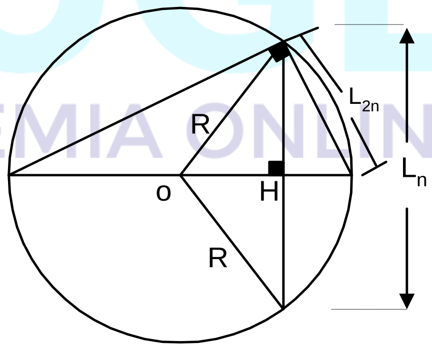
$$Ap = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\alpha = 30º$$

OBSERVACIÓN:

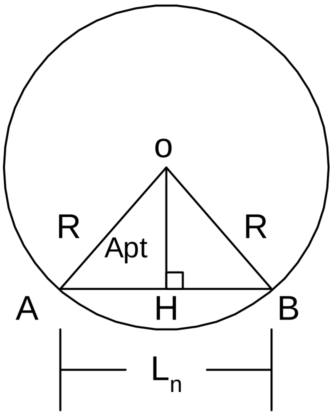
Si en un problema se dice que $\overline{AB} = L_n$, entonces se cumple que la $m\overset{\frown}{AB} = \frac{360º}{n}$

LADO DE UN POLÍGONO REGULAR DE 2n LADOS INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO "R"



$$L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$$

CÁLCULO DEL APOTEMA DEL POLÍGONO REGULAR



Apt : Apotema

R : Radio

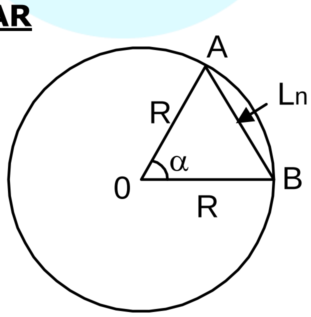
OHB Pitágoras

$Apt^2 = R^2 - HB^2$

$$Apt = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Ln}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{Apt = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - Ln^2}}$$

CALCULO DEL LADO DEL POLIGONO REGULAR



En el triángulo AOB: (Teorema de Euclides)

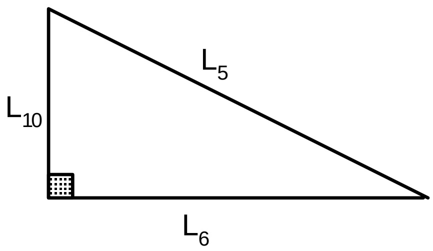
$L_n^2 = R^2 + R^2 - 2R.R \cos \alpha$

$L_n^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha$

$L_n^2 = 2R^2 (1 - \cos \alpha)$

$\boxed{L_n = R\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}$ Formula General

NOTA



PERIMETRO DE FIGURAS

Es el contorno de una figura geométrica.

TEOREMA.- La longitud de una circunferencia es igual a su diámetro multiplicado por el número π.

$\boxed{C = 2\pi R}$ $\boxed{C = \pi D}$

C: Longitud de la circunferencia
R: Radio de la circunferencia
D: Diámetro de la circunferencia

¿Qué es el número π?

Podemos decir que π es la longitud de una circunferencia de diámetro igual a 1.

Desde hace mucho tiempo (cerca de 4000 años) se notó que el número de veces en que el diámetro esta contenido en la circunferencia es siempre el mismo, sea cual sea el tamaño de esa circunferencia. Este valor constante de la razón C/D es un número, aproximadamente igual a 3,141592, el cual se representa por la letra griega π.

Ya los babilonios habían observado que el valor de π está comprendido entre $3\frac{1}{8}$ y $3\frac{1}{7}$ o sea $25/8 < \pi < 22/7$ en fracciones decimales:

$3{,}125 < \pi < 3{,}142$.

El valor más aproximado de π es de Arquímedes (π = 22/7) con error menor de 1/1000 por exceso.

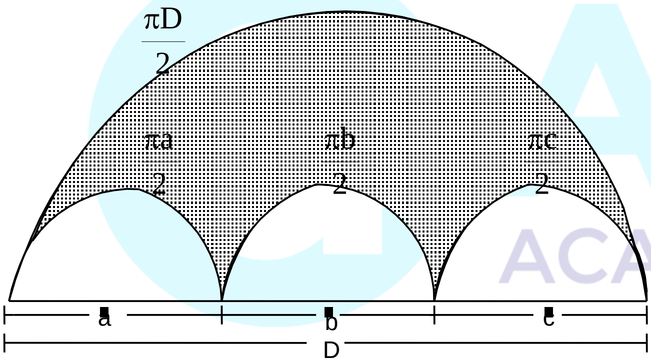
Otra expresión muy notable es la de Adriano Mecio

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}1415929....$$

En 1873, el inglés William Shanks calculó π con 707 cifras decimales exactas $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9$ .....

En 1984 en los Estados Unidos, calculo π con más de diez millones (exactamente 10013395) cifras exactas.

PROPIEDAD



Las curvas son semicircunferencias
P: Perímetro de la figura sombreada

$$\boxed{P = \pi D}$$

Por $\pi/2$ (D = a + b + c)

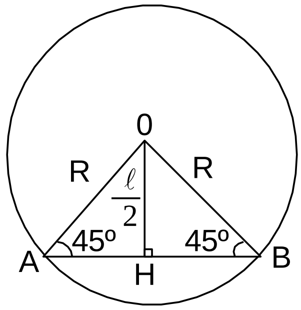
$$\frac{\pi D}{2} = \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{2}b + \frac{\pi}{2}c$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuál es el polígono regular, donde su apotema es la mitad de su lado?

a) Hexágono b) Pentágono
c) Cuadrado d) Octógono
e) Nonágono

Resolución



1. Dato Apotema = $\frac{\ell}{2}$ = OH

2. AH = HB = $\frac{\ell}{2}$ = OH

3. $m\widehat{A} = m\widehat{B} = 45º$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = 90º = \alpha$

4. Angulo central = 90º = α

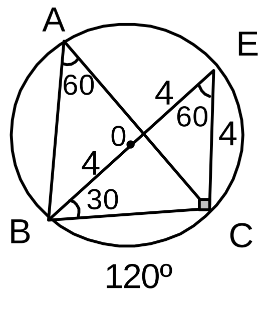
$90º = \frac{360º}{n}$

$\boxed{n = 4}$ **Rpta. c**

2. En un triángulo ABC, $m\widehat{A} = 60º$ y el circunradio mide 4. calcular BC

a) 4 b) 6 c) 8
d) $4\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{3}$

Resolución



Dato
R = 4

1. Construyo el ΔBCE BE es diámetro = 2R = 8

2. $m\widehat{A} = \widehat{E} = 60º = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

3. Triangulo notable ACE
EC = 4

$\boxed{BC = 4\sqrt{3}}$ **Rpta. e**

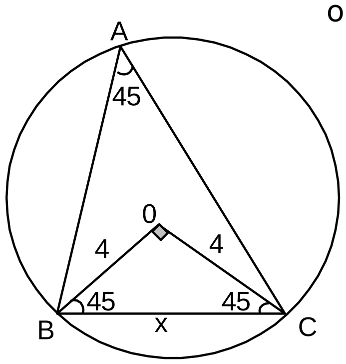
3. En un triángulo ABC, m$\widehat{A}$ = 45º y el circunradio mide 4. Calcular BC.

a) 4 b) 6 c) 8

d) $4\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{3}$

Resolución

o = Centro



1. Datos m$\widehat{A}$ = 45º, R = 4

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{BC}$ = 90º

2. Angulo Central

m$\widehat{BOC}$ = $\overset{\frown}{BC}$ = 90º

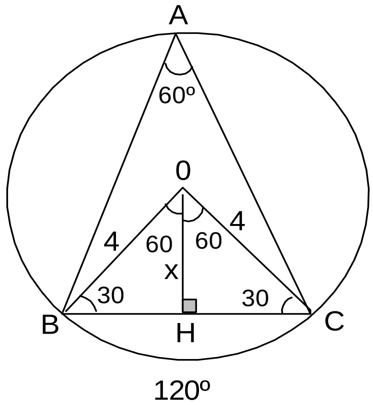
3. Triangulo notable BOC

$\boxed{x = 4\sqrt{2}}$ **Rpta. d**

4. En un triángulo ABC, m$\widehat{A}$ = 60º y el circunradio mide 4. Calcular la distancia del circuncentro al lado BC.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 8

Resolución



1. Dato m$\widehat{A}$ = 60º, R = 4

$\Rightarrow$ $\overset{\frown}{BC}$ = 120º

2. Angulo central

m$\widehat{BOC}$ = $\overset{\frown}{BC}$ = 120º

3. Triangulo notable OHC

$\boxed{x = 2}$ **Rpta. a**

5. En que relación están las apotemas del cuadrado y del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia.

a) $\sqrt{2}:1$ b) $\sqrt{3}:1$

c) $\sqrt{2}:2$ d) $\sqrt{3}:2$

e) $\sqrt{2}:3$

Resolución

$$x = \frac{\text{Apotema del cuadrado}}{\text{Apotema del triángulo Equilátero}}$$

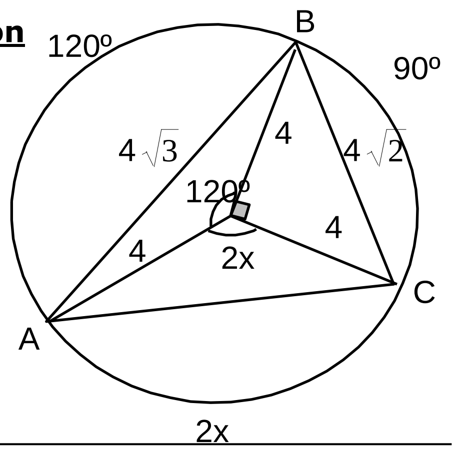
$$x = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R}{2}} \qquad \boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{1}}$$ **Rpta. a**

6. En un triángulo ABC, AB = $4\sqrt{3}$, BC= $4\sqrt{2}$ y el circunradio mide 4. Calcular la medida del ángulo B.

a) 45º b) 60º c) 75º

d) 90º e) 105º

Resolución



1. $AB = 4\sqrt{3}$, $R = 4$

$\Rightarrow$ AB es el lado de un Δ equilátero

$\overset{\frown}{AB} = 120º$

2. $BC = 4\sqrt{2}$, $R = 4$

$\Rightarrow \overline{BC}$ es el lado de cuadrado

$m\widehat{BOC} = \overset{\frown}{BC} = 90º$

3. Angulo Inscrito

$\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \widehat{B} = x$

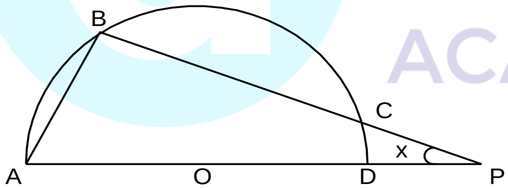
$\overset{\frown}{AC} = 2x$

4. $2x+120º+90º = 360º$

$2x = 150$

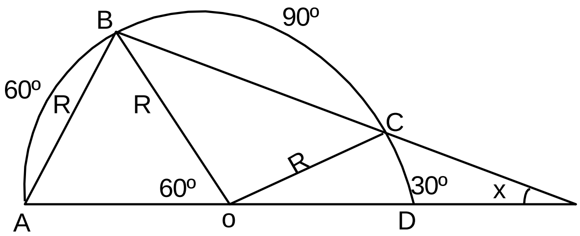
$\boxed{x = 75º}$ **Rpta. c**

7. Calcular "x" si: AB = R, BC = $R\sqrt{2}$, 0 es centro de la semicircunferencia, AO = R



a) 10º b) 15º c) 20º
d) 30º e) 37º

Resolución



1. Dato AB = R

$\Rightarrow$ AB: lado del hexágono

$\overset{\frown}{AB} = 60º$

2. Dato $BC = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ BC: lado del cuadrado

$\overset{\frown}{BC} = 90º$

3. $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = 180º$

$60º+90º+CD = 180º$

$\overset{\frown}{CD} = 30º$

4. Angulo exterior

$$x = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

$$x = \frac{60º - 30º}{2}$$

$\boxed{x = 15º}$ **Rpta. b**

8. Si un cuadrado y un hexágono regular se inscriben en una misma circunferencia, la razón de sus apotemas es:

a) 2/3 b) 3/2 c) 2/3
d) $\sqrt{3/2}$ e) $\sqrt{2/3}$

Resolución

x = <u>Apotema del Cuadrado</u>

Apotema del hexágono regular

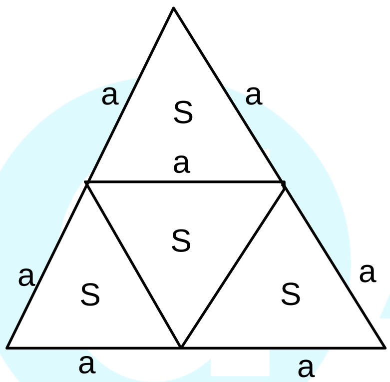
$$x = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

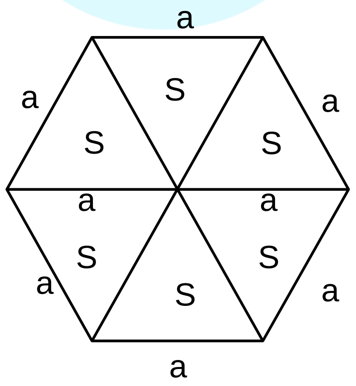
$\boxed{x = \sqrt{\frac{2}{3}}}$ **Rpta. e**

9. Si un triángulo equilátero y un hexágono regular, sus perímetros miden iguales. Calcular la razón en la que se encuentran sus áreas.

a) 2/3 b) 3/2 c) $\sqrt{2/3}$
d) $\sqrt{3/2}$ e) $\sqrt{2}/3$

Resolución





x = $\dfrac{\text{Área del triangulo equilátero}}{\text{Área del hexágono regular}}$

$$\boxed{x = \frac{4S}{6S} = \frac{2}{3}}$$ **Rpta. a**

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La hipotenusa BC de un triangulo rectángulo mide $2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, la bisectriz AP es igual al cateto menor AB. Calcular el cateto AB

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

2. La hipotenusa BC de un triángulo rectángulo ABC mide $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ u, el ángulo C es 22,5°: Hallar el cateto AB

A) 1 B) 2 C)1,5
D) 3 E) 3,5

3. Calcular el radio de un círculo tangente a tres rectas dadas, una es el lado de un hexágono regular de $24\sqrt{3}$ m de perímetro y las otras son las prolongaciones de los lados contiguos.
A) 1 B) 2 C)3
D) 4 E) 5

4. En un círculo se han trazado dos cuerdas no paralelas AB y CD, se une A con D y B con C cortándose en F. Calcular el ángulo AFC si AB = $r\sqrt{2}$ y CD = $\dfrac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$

A) 98° B) 100° C)115°
D) 117° E) 120°

5. En un triángulo isósceles (AB = AC), los ángulos B y C miden 30° cada uno, se trazan las alturas BH y CE. Calcular HE si BC = 16m.

A) 4m B) 8m C) 9m
D) 10m E) 12m

6. El ángulo B de un triángulo ABC mide 54°, calcular AC si el circunradio mide $(\sqrt{5}-1)$ m.

A) 1m B) 1,5m C) 2m
D) 2,5m E) 3m

7. En un triángulo ABC el ángulo A mide 45°, el ángulo B mide 120° y el lado BC es $2\sqrt{2}$ m. Calcular la distancia del circuncentro al lado AC.

A) 0,5m B) 1m C) 2m
D) 2,5m E) 3m

8. El lado de un dodecágono regular ABCDEFGHIJKM es $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$. Calcular el valor de la diagonal AE.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

9. El lado de un octógono regular ABCDEFGH mide $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m.; se prolongan las diagonales BH y CE hasta un punto de intersección P. Calcuar PB.

A) 5m B) 4m C) 3m
D) 2m E) 1m

10. Se tiene un octógono regular ABCDEFGH en el cuál se han trazado las diagonales AE y AC. Calcular el lado del octógono sabiendo que:
AE – AC = $2\,\dfrac{(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

11. Se tiene un dodecágono regular ABCDEFGHIJKM. Calcular el lado de dicho polígono sabiendo que AG – AE = 3u.

A) $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$ u B) $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$ u
C) $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$ u D) $(\sqrt{3}-1)$ u
E) $(\sqrt{3}+1)$ u

12. un hexágono regular de 2m de lado, se le prologa cada uno de sus lados en la misma longitud de su lado y en un mismo sentido. Hallar la apotema del polígono que resulte, al unir los extremos de estas prolongaciones.

A) 1,5m B) 2m C) 3m
D) 4m E) 6m

13. En un triángulo ABC se cumple que m< BCA=30°, AB=2u y BC=$(\sqrt{5}+1)$u. Calcule m < BAC, sabiendo que es agudo.

A) 24° B) 36° C) 72°
D) 45° E) 54°

14. El cuadrado ABCD y el triángulo equilátero AEF están inscritos en una misma circunferencia. P es el punto de intersección entre $\overline{EF}$ y $\overline{BC}$. Calcule PE, si AB=4u.

A) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ u B) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ u
C) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ u D) $(\sqrt{3}-1)$ u
E) $(\sqrt{3}+1)$ u

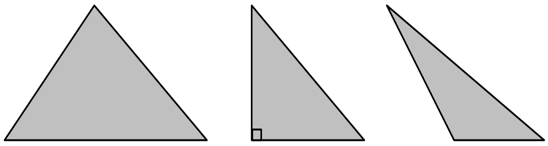
15. En un octógono regular ABCDEFGH, P es el punto de intersección entre $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$. Calcule PD, si el circunradio de dicho polígono es igual R.

A) $2R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$
C) $R\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ D) $R\sqrt{2-3\sqrt{2}}$
E) $R\sqrt{14-9\sqrt{2}}$

Áreas de regiones poligonales

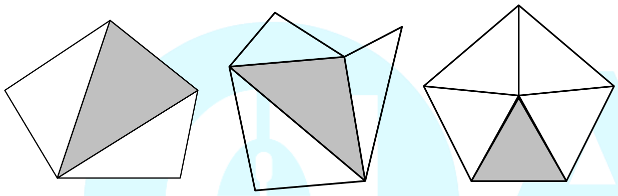
1. <u>REGION TRIANGULAR</u>

Es una figura geométrica (conjuntos de puntos) que consiste en un triángulo más su interior.



2. <u>REGION POLIGONAL</u>

Es una figura geométrica formada por la reunión de un número finito de regiones triangulares en un plano, de modo que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento.



3. POSTULADO

A toda región poligonal, le corresponde un número real positivo único.

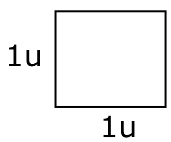
4. **ÁREA DE UNA REGION POLIGONAL**

El área de una región poligonal es el número real positivo que se le asigna según el postulado anterior.

5. UNIDAD DE ÁREA

Por costumbre se escoge como unidad de área a la unidad longitudinal al cuadrado; o sea:

$\boxed{U = 1u^2}$

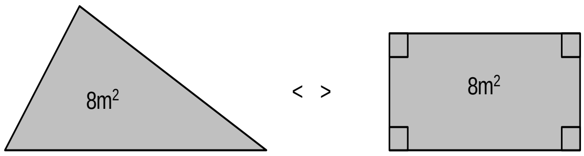


u: unidad de longitud
U: unidad de Area

6. OBSERVACIONES

* Entendemos el área de un triángulo, área de un cuadrilátero, área de un polígono, como el área de la región correspondiente.

* Dos regiones cualesquiera que tienen igual área se llaman equivalentes, independiente de la forma que tenga cada región. Ejemplo: el triángulo y el rectángulo que tiene igual área, son equivalentes.



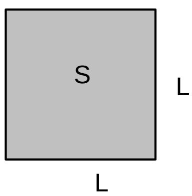
FIGURAS EQUIVALENTES

* Si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares tienen la misma área.

* Es a partir del postulado de la unidad de área (área del cuadrado) que se de muestran las fórmulas básicas para el cálculo de área de las diferentes regiones elementales: rectángulo, triángulo, trapecio, etc.

7. AREA DEL CUADRADO

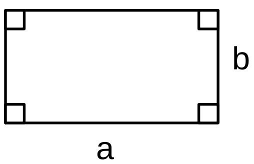
El área de un cuadrado es igual a la longitud de su lado al cuadrado; o sea:



$\boxed{S = L^2}$

8. ÁREA DEL RECTANGULO

El área de un rectángulo es el producto de su base por la altura.



$\boxed{S = a.b}$

Demostración

En la figura, $A_1 = a^2$, $A_2 = b^2$

$S + S + A_1 + A_2 = S_{total}$

$2S + a^2 + b^2 = (a+b)^2$

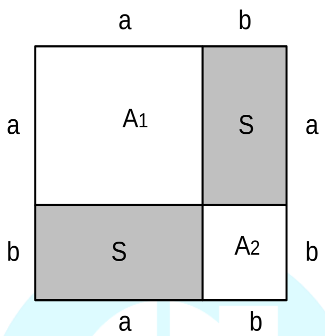
$2S + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Cancelando a^2 y b^2

$2S = 2ab$

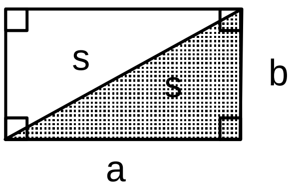
Mitad

$\boxed{S = a.b}$ L.q.q.d.



9. ÁREA DE UN TRIANGULO RECTÁNGULO

El área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de las longitudes de los catetos.



$$\boxed{S = \frac{a.b}{2}}$$

Demostración

Por área del rectángulo

$2S = a.b$

$$\boxed{S = \frac{a.b}{2}}$$

10. ÁREA DE UN TRIANGULO CUALQUIERA

El área de todo triángulo es igual al semiproducto de la longitud de un lado y la altura relativa a dicho lado.

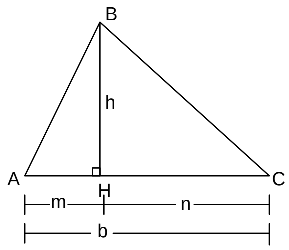
S = Area (ΔABC) $\qquad \boxed{S = \frac{b.h}{2}}$

$m + n = b$

Demostración

S = Area (ΔAHB) + Area (ΔBHC)

$$S = \frac{mh}{2} + \frac{nh}{2}$$

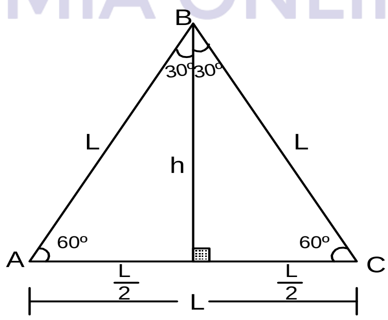


$$S = \frac{mh+nh}{2} = \frac{(m+n)h}{2}$$

$$\boxed{S = \frac{b.h}{2}} \quad \text{L.q.q.d.}$$

11. ÁREA DE UN TRIANGULO EQUILATERO

El área de todo triángulo equilátero es igual al cuadrado de la longitud del lado multiplicado por el factor $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



S = Area (ΔABC) $\qquad \boxed{S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}}$

Demostración

1. $S = \frac{L}{2} \times h$ ....(I)

2. ⊿ 30º y 60º

$h = \frac{L}{2}\sqrt{3}$ ....(II)

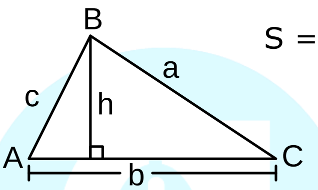
3. (II) en (I)

$S = \frac{L}{2}.\frac{L}{2}\sqrt{3}$

$\boxed{S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}}$ L.q.q.d.

12. ÁREA DEL TRIÁNGULO EN FUNCION DE SUS LADOS

(Teorema de Herón)



S = Area (ΔABC)

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

p : semiperimetro

$p = \frac{a+b+c}{2}$

Demostración

1. $S = \frac{b}{2}.h$............................(I)

2. Teorema de Heron

$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ....(II)

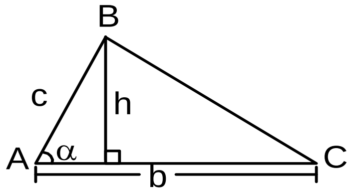
3. (II) en (I)

$S = \frac{b}{2}.\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ L.q.q.d.

13. FORMULA TRIGONOMETRICA

En todo triángulo, el área se puede expresar como el semiproducto de dos lados, por el seno del ángulo comprendido entre ellos.



S=Area(ΔABC)

$S = \frac{b.c}{2}\text{Sen}\alpha$

Demostración

1. $S = \frac{b.h}{2}$ ....(I)

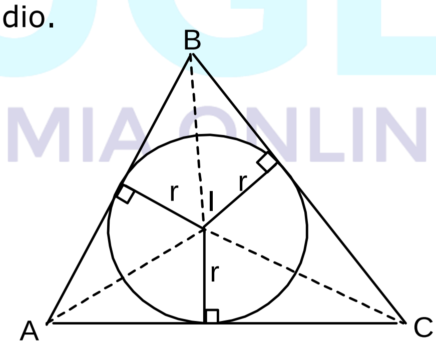
2. $\frac{h}{c} = \text{Sen}\,\alpha \Rightarrow h = c\text{Sen}\,\alpha$ ....(II)

3. (II) en (I)

$\boxed{S = \frac{b.c}{2}\text{Sen}\alpha}$ **L.q.q.d**

14. ÁREA DE UN TRIANGULO EN FUNCIÓN DEL INRADIO

El área de todo triángulo es igual al producto del semiperimetro y el inradio.



S = Area (ΔABC)
r : Inradio
P: semiperimetro

$\boxed{S = p.r}$

Demostración

S = Area (A+B)+Area(BIC)+ Area(AIC)

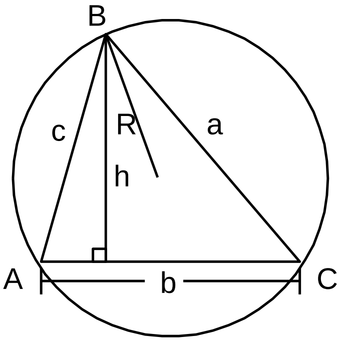
$S = \frac{AB.r}{2} + \frac{BC.r}{2} + \frac{AC.r}{2}$

$S = \left(\frac{AB + BC + AC}{2}\right)r$

$\boxed{S = p.r}$ L.q.q.d.

15. ÁREA DE UN TRIANGULO EN FUNCION DEL CIRCUNRADIO

El área de todo triángulo es igual al producto de las longitudes de los tres lados, divido por el cuádruple del circunradio



S = Area (ΔABC)

R : Circunradio

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$$

Demostración

1. $S = \dfrac{b.h}{2}$ ....(I)

2. $h = \dfrac{ac}{2R}$ ....(II)

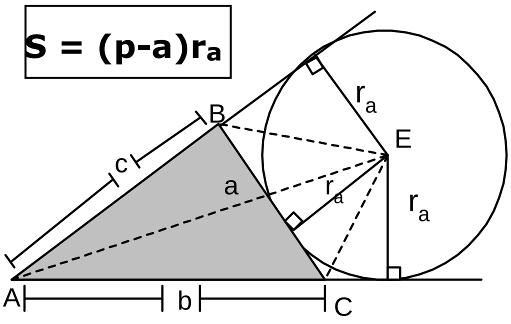
3. (III) en (I)

$S = \dfrac{b}{2}.\dfrac{ac}{2R} \Rightarrow \boxed{S = \dfrac{abc}{4R}}$ L.q.q.q

16. ÁREA DE UN TRIÁNGULO EN FUNCION DE UN EXRADIO

El área de todo triangulo es igual al producto del exradio relativo a un lado y la diferencia entre el semi perímetro y dicho lado.

$$\boxed{S = (p-a)r_a}$$



r_a: Exradio relativo al lado a

p: semiperimetro

b+c-a =b+c+a-2a = 2p-2a

17. RELACIONES FUNDAMENTALES EN EL TRIANGULO

Consideremos un triangulo ABC cualquiera de área S, de inradio r, circunradio R, exradios, r_a,r_b,r_c y altura h_a,h_b,h_c. entonces:

I. El área de un triángulo es igual a la raíz cuadrada del producto del inradio y los tres exradios.

$$\mathbf{S} = \sqrt{r\, r_a r_b r_c}$$

II. La inversa del inradio es igual a la suma de las inversas de los exradios

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

III. La inversa del inradio es igual a la suma de las inversas de las alturas.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

IV. Exradios en función de las alturas

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}$$

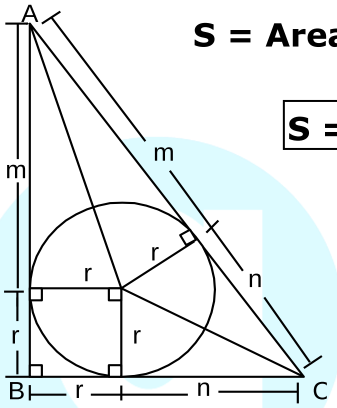
$$\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}$$

V. Además recordemos el teorema de Steiner

$$r_a+r_b+r_c-r=4R$$

18. TEOREMA DE BURLET

El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de las longitudes de los dos segmentos determinadas por la circunferencia inscrita sobre la hipotenusa.



S = Area (ABC)

$\boxed{\mathbf{S = m.\ n}}$

Demostración

1. Del gráfico: BC = r+n y
   AB = r+m

2. S = $\frac{BC.AB}{2}$ → 2S = (r+n)(r+m)

   2S = r^2 +rm + nr +mn .... (1)

3. S = p.r → S = (m+n+r).r......(2)

4. Restando (1) y (2):

$\boxed{S = mn}$ Lq.q.d.

19. Sea ABC un triángulo rectángulo ABC recto en B. (ver figura). Se dibuja la circunferencia exinscrita relativa a uno de los catetos que es tangentes a la prolongación de la hipotenusa en F. Entonces cumple:

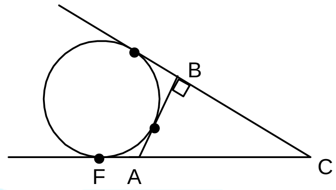
S = Area(ABC) $\boxed{\mathbf{S = FC.\ FA}}$

Demostración

1. Capitulo de circunferencia

   FC = P

   FA = r



2. S = p.r

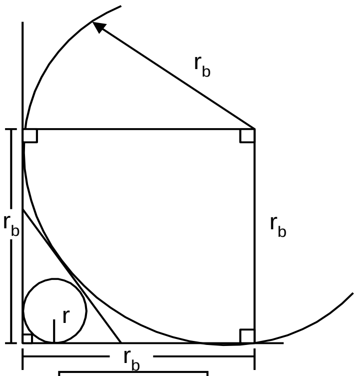
3. 1. en 2.

$\boxed{S = FC.\ FA}$ L.q.q.d

20. El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de las longitudes de los exradios relativos a los catetos

$\boxed{\mathbf{S = r_a.r_c}}$

21. El área de un triángulo rectángulo es igual al producto del inradio y el exradio relativo a la hipotenusa.



$\boxed{S = r.r_b}$

Demostración

1. S = p.r ....(1)
2. Capitulo de circunferencia

$r_b = p$ ....(2)

3. Reemplazando (2) en (1)

$S = r_b.r$

$\boxed{S = r.r_b}$ L.q.q.d

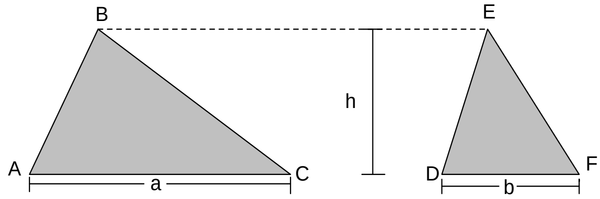
22. El área de un triangulo rectángulo es igual al producto de las longitudes de los dos segmentos que determina en la hipotenusa, la respectiva circunferencia exinscrita.

$\boxed{S = m.n}$

23. COMPARACION DE REGIONES TRIANGULARES, PROPIEDADES

I. Si dos triángulos tienen igual altura, sus áreas son proporcionales a sus respectivas bases.

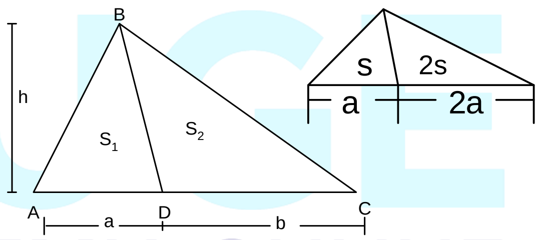
a)



$$\frac{Area(\Delta ABC)}{Area(\Delta DEF)} = \frac{\frac{a.h}{2}}{\frac{b.h}{2}}$$

$$\boxed{\frac{Area(\Delta ABC)}{Area(\Delta DEF)} = \frac{a}{b}}$$

b) Relación de áreas al trazar una ceviana



$\overline{BD}$: Ceviana

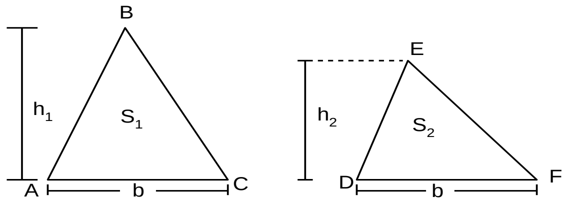
S_1 = Area(ΔABD)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{a.h}{2}}{\frac{b.h}{2}}$$

S_2 = Area(ΔDBC)

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}}$$ **L.q.q.d.**

II. Si dos triángulos tienen igual base, sus áreas son proporcionales a sus respectivas alturas.

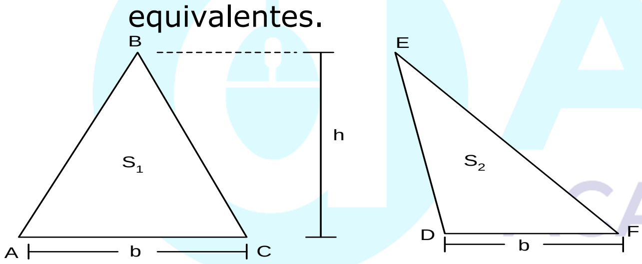


S_1 = Area(ΔABC) ;

S_2 = Area(ΔDEF)

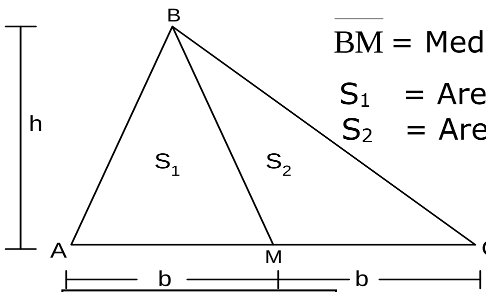
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{b.h_1}{2}}{\frac{b.h_2}{2}} \qquad \boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}} \quad \textbf{L.q.q.d.}$$

III. Si dos triángulos tienen un lado congruente y las respectivas alturas congruentes entonces son equivalentes.



$$\boxed{S_1 = S_2 = \frac{b.h}{2}}$$

IV. En todo triángulo, una mediana cualquiera determina dos triángulos parciales equivalentes.



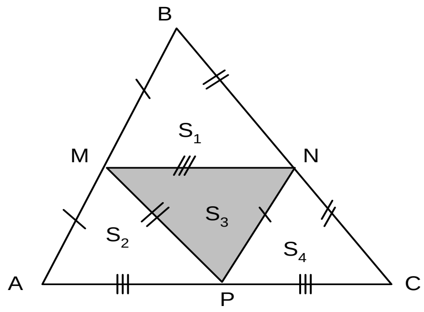
$\overline{BM}$ = Mediana

S_1 = Area (ABM)

S_2 = Area (MBC)

$$\boxed{S_1 = S_2 = \frac{b.h}{2}}$$

V. En todo triángulo, al unir los puntos medios de los tres lados, se determinan cuatro triángulos parciales equivalentes.



S_1 = Area (ΔMBN); S_2 = Area (ΔAMP)

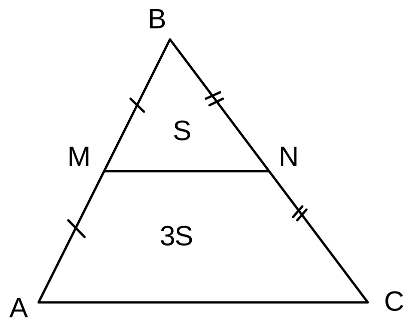
S_3 = Area (ΔMNP); S_4 = Area (ΔNPC)

* Por ser congruentes los triángulos MBN, AMP, MNP y NPC se tendrán:

$$\boxed{S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{\text{Area}(\Delta ABC)}{4}}$$

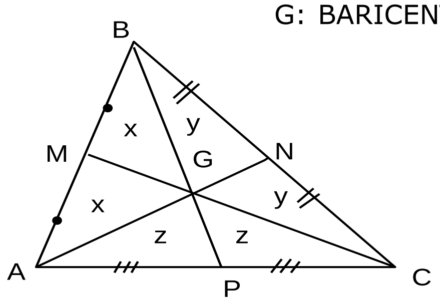
Observación

El área del trapecio AMNC es igual al triple del área del triángulo MBN.



VI. En todo triángulo, al trazar las tres medianas se determinan seis triángulos parciales equivalentes

G: BARICENTRO



1. $2x + z = 2y + z$

<u>MITAD</u> $x = y$

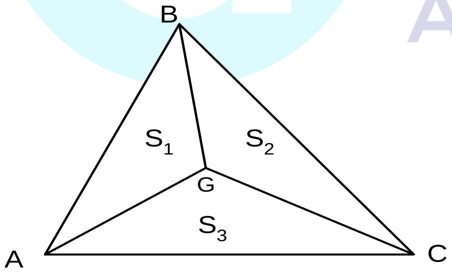
2. $2y + x = 2z + x$

<u>MITAD</u> $y = z$

3. Luego:

$$\boxed{x = y = z}$$

VII. En todo triángulo, si se une el baricentro con los tres vértices se determina tres triángulos parciales equivalentes

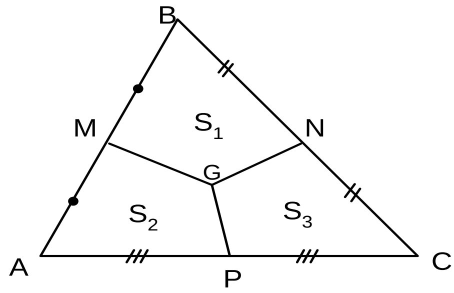


G: BARICENTRO

$$\boxed{S_1 = S_2 = S_3 = \frac{\text{Area}(\Delta ABC)}{3}}$$

$$S_1 = 2x \ , \ S_2 = 2y \ , \ S_3 = 2z$$

VIII. En todo triángulo, al unir el baricentro con los puntos medios de los tres lados, se determinan tres regiones equivalentes.

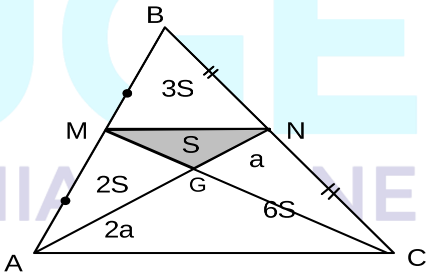


G: BARICENTRO

$$\boxed{S_1 = S_2 = S_3 = \frac{\text{Area}(\Delta ABC)}{3}}$$

$S_1 = x+y$, $S_2 = x+z$, $S_3 = y+z$

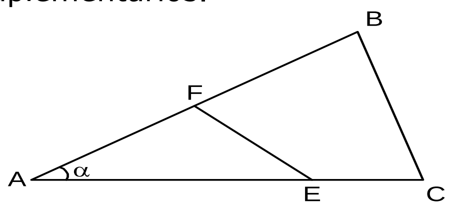
IX. En todo triángulo, al unir el baricentro con los puntos medios de dos lados cualesquiera, se determina una región triangular cuya área equivale a la doceava parte del área total.



$$\mathbf{12S = Area\ (\Delta ABC)}$$

$$\boxed{S = \frac{\text{Area}(\Delta ABC)}{12}}$$ **L.q.q.d.**

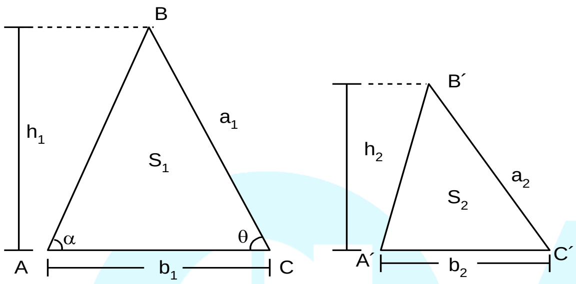
X. Si dos triángulos tienen un ángulo congruente o ángulos suplementarios entonces sus áreas son proporcionales a los productos de los lados que forman ese ángulo que mide igual o esos ángulos suplementarios.



$$\frac{Area(\Delta AFE)}{Area(\Delta ABC)}=\frac{\frac{AF.AE}{2}Sen\alpha}{\frac{AB.AC}{2}Sen\alpha}$$

$$\frac{Area(\Delta AFE)}{Area(\Delta ABC)}=\frac{AF.AE}{AB.AC}$$

XI. Si dos triángulos son semejantes entonces sus áreas son proporcionales a los cuadrados del cualquier par de elementos homólogos.



1. Sea K la razón de semejanza de los triángulos ABC y A´B´C:

$$\frac{b_1}{b_2}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{r_1}{r_2}=K \quad ....(1)$$

2. $$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{b_1.h_1}{2}}{\frac{b_2.h_2}{2}} \rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{b_1}{b_2}.\frac{h_1}{h_2} \quad ....(2)$$

3. Reemplazando (1) en (2)

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{b_1}{b_2}.\frac{b_1}{b_2} \rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2=K^2$$

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2}=\left[\frac{b_1}{b_2}\right]^2=\left[\frac{h_1}{h_2}\right]^2=\left[\frac{a_1}{a_2}\right]^2=\left[\frac{r_1}{r_2}\right]^2=K^2}$$

EJERCICIOS

1. Encontrar el área de un triángulo cuyos lados miden 10, 12 y 14cm.
   A) $10\sqrt{7}$ B) $24\sqrt{6}$ C) $12\sqrt{10}$
   D) $14\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6}$

2. Calcular el área de triángulo equilátero, sabiendo que el radio de la circunferencia inscrita mide 2cm.
   A) $12\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
   D) $2\sqrt{3}$ E) 6

3. En un triángulo ABC las alturas se cortan en "0". Si AC x OB = 42. Calcular el área del cuadrilátero ABCO
   A) 42 B) 21 C) 18
   D) 38 E) 14

4. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se trazan la mediana $\overline{BM}$ y la bisectriz interior $\overline{BN}$. Calcule el área de la región triangular MBN, si AB=6cm y BC=4cm.
   A) $1,2cm^2$ B) $1,4cm^2$ C) $1,5cm^2$
   D) $1,6cm^2$ E) $1,8cm^2$

5. En un cuadrado ABCD se traza la tangente BT a la semicircunferencia interior de diámetro AD. En el arco AT se ubica un punto por el cual se traza una tangente a la semicircunferencia mencionada, cortando a $\overline{AB}$ en P y a $\overline{BT}$ en Q. Si AP.QT=$6cm^2$. Calcule el área de la región triangular PBQ.
   A) $6cm^2$ B) $9m^2$ C) $12cm^2$
   D) $18m^2$ E) $20cm^2$

6. Dos catetos de un triángulo rectángulo miden AB = 7m y AC = 24m. Calcular el área del triángulo rectángulo cuyos vértices son el ortocentro, el circuncentro y el incentro del triángulo indicado.
A) $12m^2$ B) $12,75m^2$ C) $15m^2$
D) $20m^2$ E) $25m^2$

7. Los lados de un triángulo ABC miden AB = 21m, AC = 28m y BC = 35m. Se trazan las bisectrices CP y AQ, las cuales se cortan en el punto I. Calcular la el área del triangulo CIQ.
A) $20m^2$ B) $30m^2$ C) $45m^2$
D) $70m^2$ E) $75m^2$

8. Los catetos AB y AC de un triángulo rectángulo miden 8m y 6m respectivamente. M y N son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita de centro "O" y la exinscrita relativa al lado AC. Hallar el área del triángulo OMN.
A)$1m^2$ B) $2m^2$ C)$3m^2$
D)$4m^2$ E) $5m^2$

9. Los lados de un triángulo rectángulo miden: AB = 30m, AC = 40m y BC = 50m. Se traza la bisectriz BL y la altura AH cortándose ambas en el punto M. Calcular el área del triángulo ABM.
A) $60m^2$ B) $80m^2$ C)$90m^2$
D)$120m^2$ E) $135m^2$

10. En un triángulo rectángulo ABC recto en A, se traza AH altura relativa a la hipotenusa y las bisectrices BP y CE cortándose en F y cortando a la altura en G y M. Si la distancia de F a GM es de 2m. Calcular el área del triángulo FGM, si AE = 5m y AP = 6m.
A) $1m^2$ B) $2m^2$ C) $3m^2$
D) $2,5m^2$ E) $3,5m^2$

11. El triángulo ABC tiene como lados AB = 20m, AC = $6\sqrt{5}$m, BC= 10m. Se traza la altura CE y por E se traza EM perpendicular a AC. Calcular el área del triangulo EMC.
A) $10m^2$ B) $5,5m^2$ C) $8m^2$
D) $7,2m^2$ E) $6,2m^2$

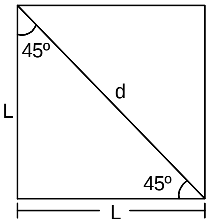
12. En un triángulo ABC sus lados miden AB = 12m, BC = 16m y AC = 20m. Por el punto medio M del lado AC se levanta una perpendicular que corta al lado BC en N. Tomando como diámetro MN se construye una circunferencia que corta a BC en Q. Calcular el área del triángulo MQN.
A) $11m^2$ B) $12,5m^2$ C) $9m^2$
D) $13m^2$ E) $13,5m^2$

13. Se da un triángulo isósceles ABC (AB = BC) en donde AC = 5m y la altura AH mide 4m. Calcular el área del triángulo BOH siendo "O" la intersección de las alturas AH y BP
A) $25/6m^2$ B) $7m^2$ C)$7/8m^2$
D) $49/96m^2$ E) $14m^2$

14. Se tiene dos circunferencias exteriores de radios 1 y 8 metros respectivamente cuyas tangentes interiores son perpendiculares. Calcular el área del triángulo formado por dichas tangentes y una de las exteriores común a las dos circunferencias.
A) $4m^2$ B) $8m^2$ C) $9m^2$
D) $10m^2$ E) $12m^2$

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES Y CIRCULARES

1. ÁREA DEL CUADRADO(S)

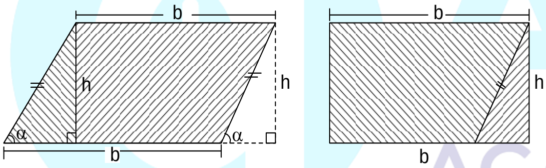


$$L\sqrt{2} = d \rightarrow L = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$S = L^2 \rightarrow S = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\boxed{S = \frac{d^2}{2}}$$

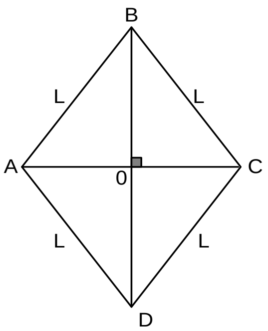
2. ÁREA DEL PARALELOGRAMO(S)



$$\boxed{S = b.\,h}$$

b : base
h : altura

3. ÁREA DEL ROMBO (S)



S = Area (ΔABC) + Area (ΔADC)

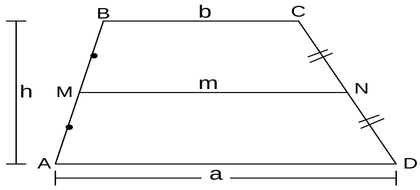
$$S = \frac{AC.BO}{2} + \frac{AC.OD}{2}$$

$$S = \frac{AC(BO + OD)}{2}$$

$$\boxed{S = \frac{AC.BD}{2}}$$

AC : diagonal menor
BD: diagonal mayor

4. ÁREA DEL TRAPECIO (S)



S = Area (ΔABD) + Area (ΔBDC)

$$S = \frac{a.h}{2} + \frac{b.h}{2} = \frac{a.h + b.h}{2}$$

$$\boxed{S = \left(\frac{a+b}{2}\right).\,h}$$

a: base mayor

$$m = \frac{a+b}{2}$$

b: base menor

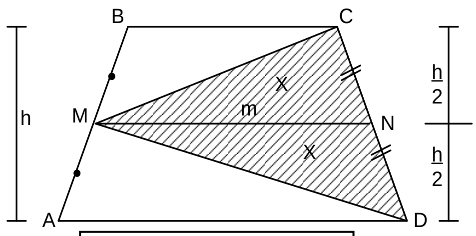
m: mediana

$$\boxed{S = m.h}$$

h: altura

5. TEOREMA

Si se une el punto medio de un lado no paralelo de un trapecio con los extremos del otro lado no paralelo, se forma un triángulo cuya área es igual a la mitad del área del trapecio.



$$\boxed{S = \frac{Area(ABCD)}{2}}$$

S = Area (ΔCMD)

Demostración

$$S = 2X = 2\left(\frac{m.\frac{h}{2}}{2}\right)$$

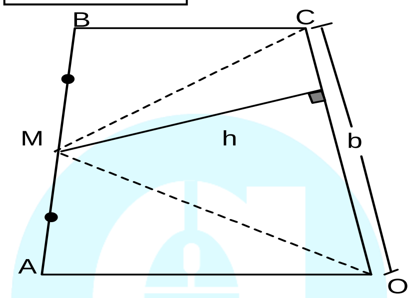
$$S = \frac{m.h}{2}$$

Pero m.h = Area (ABCD)

$$\boxed{S = \frac{\text{Area (ABCD)}}{2}}$$

6. ÁREA DEL TRAPECIO (S)

$\boxed{S = b.h}$ S: Area (ABCD)



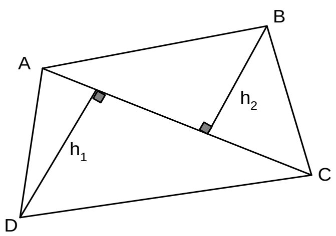
Demostración

$$\frac{\text{Area(ABCD)}}{2} = \text{Area}(\Delta CMD)$$

$$\frac{\text{Area(ABCD)}}{2} = \frac{b.h}{2}$$

$\boxed{S = b.h.}$ L.q.q.d

7. ÁREA DE UN TRAPEZOIDE (S)

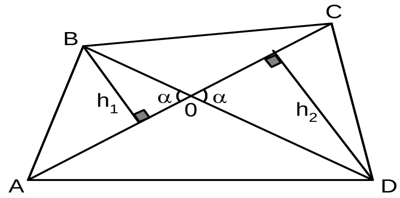


S = Area (ΔACD) + Area (ΔABC)

$$S = \frac{AC.h_1}{2} + \frac{AC.h_2}{2}$$

$$\boxed{S = \frac{AC(h_1 + h_2)}{2}}$$

8. FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA (S)



S = Area (ABCD)

$$S = \frac{AC(h_1 + h_2)}{2} \quad ....(1)$$

$$\frac{h_1}{BO} = Sen\alpha \rightarrow h_1 = BO\ Sen\alpha$$

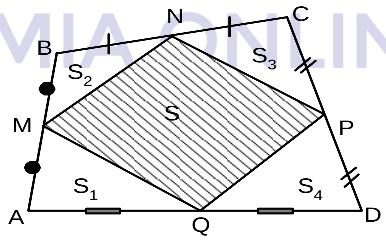
$$\frac{h_2}{OD} = Sen\alpha \rightarrow h_2 = OD\ Sen\alpha$$

Suma: $h_1 + h_2 = BD\ Sen\alpha$....(2)

(2) en (1) $\boxed{S = \frac{AC.BD\ Sen\alpha}{2}}$

9. TEOREMA

En todo cuadrilátero convexo se cumple, que al unir los puntos medios de sus lados se forma un paralelogramo; cuya área es igual a la mitad del área del cuadrilátero.



$$\boxed{S = \frac{\text{Area (ABCD)}}{2}}$$

Demostración

Comparación de Áreas

$$S_1 = \frac{\text{Area (BAD)}}{4};\ S_3 = \frac{\text{Area (BCD)}}{4}$$

Sumando las 2 expresiones

$$S_1 + S_3 = \frac{\text{Area (BAD)} + \text{Area (BCD)}}{4}$$

$S_1 + S_3 = \dfrac{\text{Area}(ABCD)}{4}$.....(1)

<u>Analógicamente</u>:

$S_2 + S_4 = \dfrac{\text{Area}(ABCD)}{4}$.....(2)

$$\underbrace{S_1 + S_3}_{\frac{\text{AREA}(ABCD)}{4}} + \underbrace{S_2 + S_4}_{\frac{\text{AREA}(ABCD)}{4}} + S = \text{Area}\,(ABCD)$$

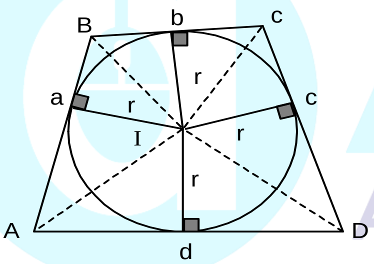
$$\boxed{S = \frac{\text{Area}\,(ABCD)}{2}} \qquad \text{L.q.q.d}$$

Observación: Igualando (1) y (2)

$$\boxed{S_1 + S_3 = S_2 + S_4}$$

10. ÁREA DEL CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, el área es igual al producto del semiperímetro y el radio de dicha circunferencia.



$$\boxed{S = p.r.}$$

$p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

S = Area (ABCD)

Demostración

S = Area (AIB) + Area (BIC) + Area (CID) + Area (AID)

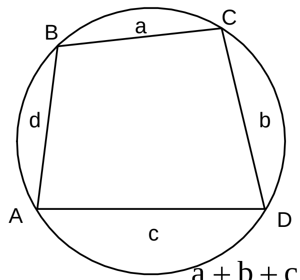
$$S = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} + \frac{d.r}{2}$$

$$S = \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)r$$

$$\boxed{S = p.r.} \qquad \text{L.q.q.d}$$

11. Área del Cuadrilátero Inscrito (Teorema de Bramaguptha)

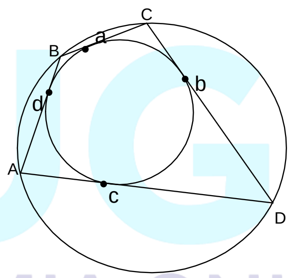
$$\boxed{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$



S = Area (ABCD), $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

* Se deja la demostración al lector

12. Área del Cuadrilátero Bicéntrico (S) (Teorema de Leudesdorf)



$$S = \sqrt{abcd}$$

<u>Demostración</u>:

1) PITHOT a+c = b+d = p

2) Teorema de Bramaguptha

$S = \sqrt{(a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)(b+d-d)}$

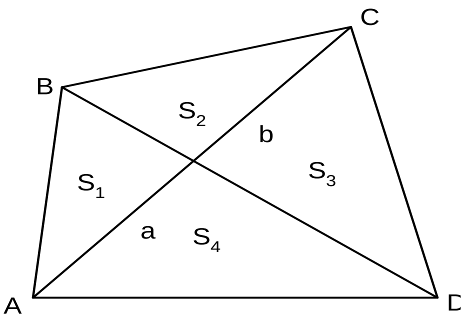
$S = \sqrt{cdab}$

$$\boxed{\mathbf{S = \sqrt{abcd}}} \qquad \textbf{L.q.q.d}$$

13. PROPIEDADES DE LAS REGIONES CUADRANGULARES

13.1 Si en un cuadrilátero convexo se trazan las diagonales se determina cuatro triángulos parciales y cumple que los productos de las áreas de los triángulos opuestos son iguales.

$$\boxed{S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4}$$



Demostración

1) Comparación de Áreas

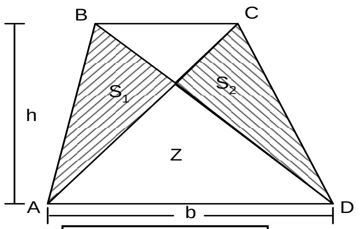
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}; \qquad \frac{S_4}{S_3} = \frac{a}{b}$$

2) Igualando

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$$

$$\boxed{S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4} \quad \textbf{L.q.q.d}$$

13.2 En todo trapecio, las áreas de los triángulos laterales determinados al trazar las dos diagonales, son iguales. Es decir dichos triángulos son equivalentes.



$$\boxed{S_1 = S_2}$$

Demostración

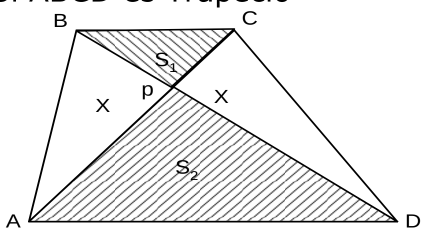
1) Área (ABD) = Área (ACD) = $\frac{b.h}{2}$

$S_1 + Z = Z + S_2$

2) Simplificando Z

$$\boxed{S_1 = S_2} \quad \textbf{L.q.q.d.}$$

13.3 Si ABCD es Trapecio



S_1 = Area (BPC)
S_2 = Area (APD)
S = Area (ABCD)

$$\boxed{S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2}$$

Demostración

1) Propiedad 13.2
Area (APB) = Area (CPD) = X

2) Propiedad 13.1
$X^2 = S_1 \cdot S_2 \rightarrow X = \sqrt{S_1} \cdot \sqrt{S_2}$ ...(1)

3) $S = S_1 + 2X + S_2$ ..... (2)

4) (1) en (2)

$$S = (\sqrt{S_1})^2 + 2\sqrt{S_1}\sqrt{S_2} + (\sqrt{S_2})^2$$

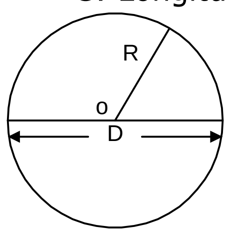
$$\boxed{S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}$$

ÁREA DE REGIONES CIRCULARES

CIRCULO. Es la región del plano limitada por una circunferencia

Teorema 1. El área de todo círculo es igual al semiproducto de la longitud de su circunferencia y el radio

S: Área del Círculo
C: Longitud de la circunferencia



$$\boxed{C = 2\pi R}$$

$$S = \frac{2\pi R \cdot R}{2}$$

$$R = \frac{D}{2} \qquad \boxed{S = \pi R^2}$$

D: Diámetro $S = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$

R: Radio $\boxed{S = \frac{\pi D^2}{4}}$

II. SECTOR CIRCULAR

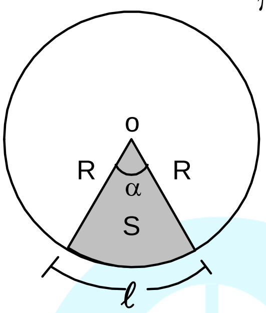
Es la porción del círculo limitada por dos radios

<u>Teorema 2</u>. El área de todo sector circular de radio R y ángulo central "α" es:

S: Area del Sector Circular

πR^2 ------ 360º

s ------ αº



$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^o}} \quad \text{(I)}$$

O es centro

R es radio

ℓ es longitud de arco

$2\pi R$ ----- 360º

ℓ ------- α

$$\boxed{\ell = \frac{2\pi R\alpha}{360^o}} \quad \text{(II)}$$

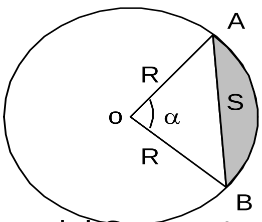
Dividendo I entre II

$$\frac{S}{\ell} = \frac{R}{2}$$

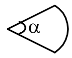
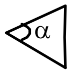
$$\boxed{S = \frac{\ell \cdot R}{2}}$$

III. SEGMENTO CIRCULAR

Es la porción del círculo limitada por una cuerda y su respectivo arco.



S = Area del Segmento Circular

$S =$  $-$ 

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2 \operatorname{Sen}\alpha}{2}$$

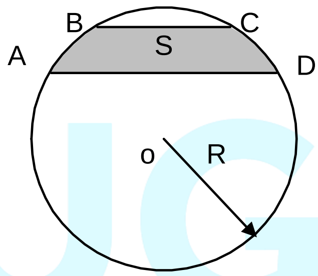
$$\boxed{S = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \operatorname{Sen}\alpha\right)}$$

IV. ZONA O FAJA CIRCULAR

Es la porción de círculo limitada por dos cuerdas paralelas.

a) Las bases a un mismo lado del centro.

S: Área de la faja circular



$m\overset{\frown}{AOD} = \alpha$

$m\overset{\frown}{BOC} = \beta$

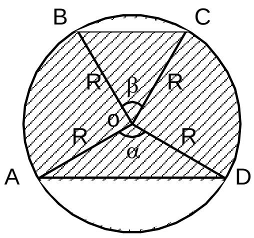
$$\boxed{S = S_{AD}^{segmento} - S_{BC}^{segmento}}$$

$$S = \frac{R^2}{2}\left[\frac{\pi(\alpha-\beta)}{180^o} - \operatorname{Sen}\alpha + \operatorname{Sen}\beta\right]$$

Si $\alpha + \beta = 180º \Rightarrow \operatorname{Sen}\alpha = \operatorname{Sen}\beta$

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2}{360^o}(\alpha - \beta)}$$

b) Las bases a diferentes lados del centro.



O : Centro

S : Area de la faja circular

$m\overset{\frown}{AOD} = \alpha º$

$m\overset{\frown}{BOC} = \beta º$

$S = \pi R^2 - S_{AD\ segmento} - S_{BC\ segmento}$

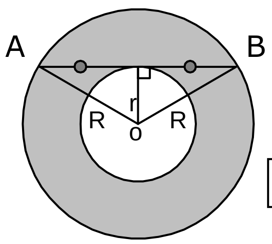
$$S = \frac{R^2}{2}\left[\frac{\pi}{180}(360 - \alpha - \beta) + \operatorname{Sen}\alpha + \operatorname{Sen}\beta\right]$$

Si $\alpha + \beta = 180º \Rightarrow \operatorname{Sen}\alpha = \operatorname{Sen}\beta$

$$\boxed{S = \frac{R^2}{2}[\pi + 2\text{Sen}\alpha]}$$

V. CORONA CIRCULAR

Se llama así a la región del plano exterior a la menor de dos circunferencias concéntricas e interior a la mayor



S : Área de la Corona Circular

$S = \pi R^2 - \pi r^2$

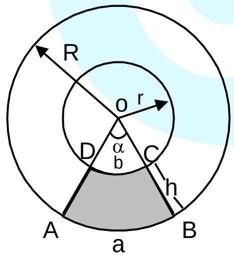
$$\boxed{S = \pi (R^2 - r^2)}$$

Pitágoras: $R^2 - r^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

$$\boxed{S = \frac{\pi AB^2}{4}}$$

$\overline{AB}$ es cuerda tangente a la circunferencia menor

VI. TRAPECIO CIRCULAR



O es el centro

S es área del trapecio circular

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^o} - \frac{\pi r^2 \alpha}{360^o}$$

$$\boxed{S = \frac{\pi \alpha}{360}(R^2 - r^2)}$$

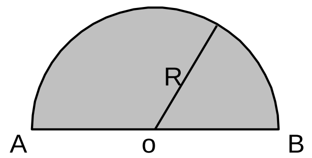
$$\boxed{S = \left(\frac{a+b}{2}\right) x\, h}$$

a : Longitud del arco AB

b : Longitud del arco CD

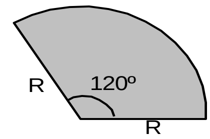
<u>OBSERVACION</u>

En algunos problemas donde no sea necesario resaltar el ángulo central del sector circular al que hagamos referencia escribiremos las expresiones directas para el área, como una fracción del círculo correspondiente



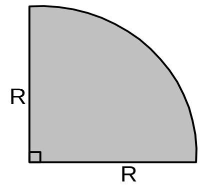
La Mitad de circulo

$$\frac{\pi R^2}{2}$$

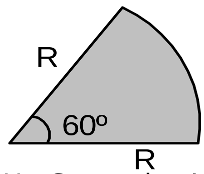


Un Tercio de circulo

$$\frac{\pi R^2}{3}$$

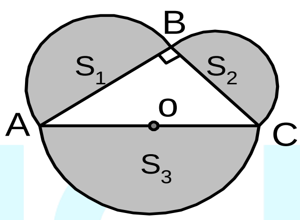


Un cuarto de circulo



Un Sexto de circulo

PROPIEDAD 1



$$\boxed{S_1 + S_2 = S_3}$$

S_1 : Área del semicírculo de diámetro AB

S_2 : Área del semicírculo de diámetro BC

S_3 : Área del semicírculo de diámetro AC

<u>Demostración</u>.

1. $S_1 = \frac{\pi}{8} AB^2$, $S_2 = \frac{\pi}{8} BC^2$,

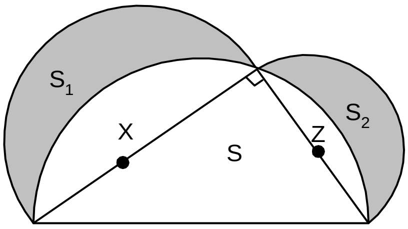
   $S_3 = \frac{\pi}{8} AC^2$

2. $S_1 + S_2 = \frac{\pi}{8} (AB^2 + BC^2)$

3. $S_1 + S_2 = \frac{\pi}{8} AC^2$

4. $\boxed{S_1 + S_2 = S_3}$ L.q.q.d.

LUNULAS DE HIPÓCRATES



S_1 y S_2 son áreas de las lúnulas.
S : Área del triángulo ABC

$$\boxed{S_1 + S_2 = S}$$

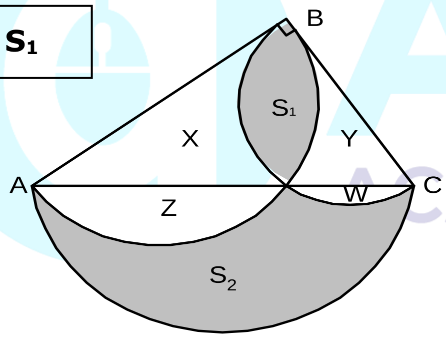
Demostración:
Por la propiedad 1

$(S_1 + X) + (S_2 + Z) = (X + S + Z)$

$\boxed{S_1 + S_2 = S}$ L.q.q.d.

PROPIEDAD 2

$$\boxed{S = S_2 - S_1}$$



S : Area del triángulo ABC

Demostración:
Por la propiedad 1

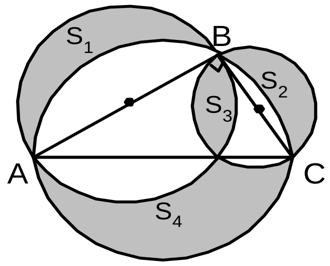
$(Z+X+S_1)+(S_1+Y+W) = (Z + S_2 + W)$

$\underbrace{x + S_1 + y}_{S} + S_1 = S_2$

$S + S_1 = S_2$

$\boxed{S = S_2 - S_1}$ L.q.q.d.

PROPIEDAD 3



$$\boxed{S_4 = S_1 + S_2 + S_3}$$

Demostración:

Propiedad 2 : $S_4 - S_3$ = Area (ABC)
Lúnulas: $\underline{S_1 + S_2 = \text{Area (ABC)}}$
Igualando: $S_4 - S_3 = S_1 + S_2$

$\boxed{S_4 = S_1 + S_2 + S_3}$ L.q.q.d.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Las diagonales de un cuadrilátero miden 30m y 40m. Calcular el área del cuadrilátero sabiendo además que dichas diagonales forman un ángulo de 30°.
   A) 100m^2 B) 200 m^2 C) 300 m^2
   D) 400 m^2 E) 500 m^2

2. Sobre la circunferencia de un círculo de 6m de radio se toma el punto "M", luego haciendo centro en "M" y con radio $6\sqrt{2}$ m. se traza un arco en el interior, cortando a la circunferencia en los puntos A y B. Calcular el área de la lúnula que se ha formado.

   A) 12m^2 B) 20 m^2 C) 30 m^2
   D) 36 m^2 E) 46 m^2

3. Se tiene un rectángulo ABCD en la que AB = 12m y BC= 6m; se toma como diámetro AB y se construye el semicírculo en el interior del rectángulo y luego haciendo centro

en A y B se construyen en el interior del cuadrado, cuartos de círculos. Calcular el área común a los tres arcos.

A) $6(3\sqrt{3} - \pi)$ B) $6(3\sqrt{2} - \pi)$
C) $4(3\sqrt{3} + \pi)$ D) $2(3\sqrt{3} - \pi)$
E) $3(3\sqrt{3} + \pi)$

4. ABCDEF, es un hexágono regular da lado 6cm. Con centro en "A", se traza un arco CE. Luego con centro en "D" se traza un arco de radio 6cm. hallar el área de la región que encierran dichos arcos.

A) $(30\pi - 36\sqrt{3})$ B) $(30\pi - 3\sqrt{2})$
C) $(3\sqrt{3} + 6\pi)$ D) $(3\sqrt{3} - 30\pi)$
E) $(3\sqrt{3} - 36\pi)$

5. AC es diámetro de una semicircunferencia circunscrita al triángulo isósceles ABC. Con centro en A y radio AC, se traza un arco CF, estando F en la prolongación de AB. Luego exteriormente al triángulo ABC se dibuja otra semicircunferencia de diámetro AF. Hallar el área de la región que encierra las curvas ABC, CF y FA, si la región triangular ABC tiene un área de $8m^2$.

A) $4\pi m^2$ B) $5\pi m^2$ C) $6\pi m^2$
D) $8\pi m^2$ E) $16\pi m^2$

6. Sobre el diámetro AC de un semicírculo se toma el punto B y se dibuja interiormente dos semicircunferencias AB y BC (AB>BC). Hallar el área de la región que encierran los arcos AB, BC y AC, si el segmento tangente común a AB y BC mide 8cm.

A) $64\pi cm^2$ B) $24\pi cm^2$ C) $32\pi cm^2$
D) $16\pi cm^2$ E) $8\pi cm^2$

7. Un rectángulo de $48m^2$ de superficie esta inscrito en una circunferencia de 10 metros de diámetro. Hallar el perímetro del rectángulo

A) 48m B) 28m C) 30m
D) 40m E) 25m

8. En el interior de un rectángulo ABCD, se ubica el punto "P" y en AD se ubica el punto "M", tal que el triángulo MPD es equilátero. Calcular el área de la región cuadrangular BDCP, si MD= 2AM=12u.

A) $27\sqrt{3}u^2$ B) $9\sqrt{3}u^2$ C) $18\sqrt{3}u^2$
D) $9\sqrt{3}u^2$ E) $54\sqrt{3}u^2$

9. Hallar el área de un trapecio rectángulo cuyas base miden 4 y 13 metros, sabiendo que una diagonal es perpendicular a un lado

A) $42m^2$ B) $51m^2$ C) $64m^2$
D) $36m^2$ E) $60 m^2$

10. Se tiene un cuadrado ABCD, en la prolongación de AD se ubica el punto "M" y en CD al punto "L" tal que DMNL sea un cuadrado y AM=10u. Calcular el área de la región cuadrangular ABNM

A) $25 u^2$ B) $30 u^2$ C) $50u^2$
D) $100 u^2$ E) $60 u^2$

11. Hallar el área de un rombo ABCD si "M" biseca a BC; AM corta BD en R, RM=2u y $\angle$BRM=45°.

A) $12u^2$ B) $24u^2$ C) $36u^2$
D) $48u^2$ E) $60u^2$

12. Hallar el área de un trapecio rectángulo ABCD, si $AD \perp DC$; la base menor es DC=4; el lado no paralelo CB = 13 y la diagonal DB = 15.

A) $68u^2$ B) $78u^2$ C) $88u^2$
D) $98u^2$ E) $100 u^2$

13. Hallar el área de región limitada por el rectángulo ABCD. Si las proyecciones de AB y AD sobre AC son 4m y 8m repectivamente

A) $12\sqrt{2}\ m^2$ B) $24\sqrt{2}\ m^2$ C) $48\sqrt{2}\ m^2$
D) $13\sqrt{3}\ m^2$ E) $26\sqrt{3}\ m^2$

RECTAS, PLANOS, DIEDROS, TRIEDROS Y POLIEDROS

GEOMETRÍA DEL ESPACIO O ESTEREOMETRÍA
Estudia la forma y extensión de las figuras geométricas cuyos puntos no están en un mismo plano (espacio tridimensional)

ESPACIO TRIDIMENSIONAL

A dicha idea tenemos dos postulados importante:

a. Dada una recta cualquiera L, hay por lo menos un punto P, tal que P no pertenece a L.

b. Dado un plano cualquiera M, hay por lo menos un punto P, tal que P no pertenece a M.

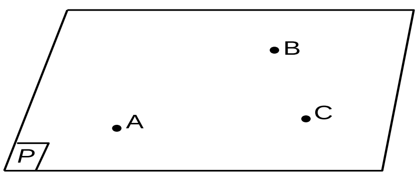
POSTULADOS DEL PLANO

a. Todo plano contiene al menos tres puntos no colineales.
b. Dos puntos cualesquiera de un plano determinan una recta, que esta contenida en el plano.

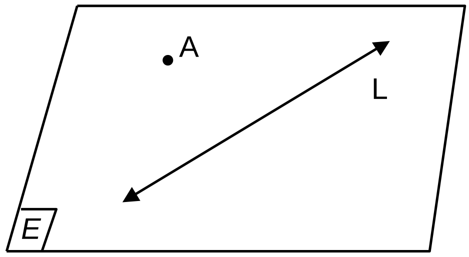
POSTULADOS DEL ESPACIO
a. El espacio contiene al menos cuatro puntos que no son coplanarios.
b. Por un punto del espacio pasan infinitas rectas.
c. Por una recta del espacio pasan infinitos planos.

DETERMINACIÓN DE UN PLANO
Un plano queda determinado por:

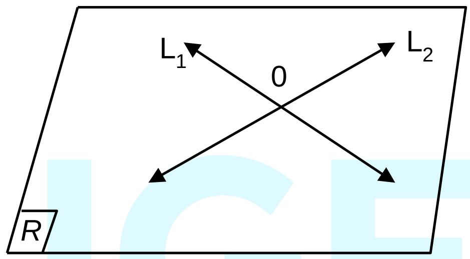
a. **Tres puntos no colineales.**



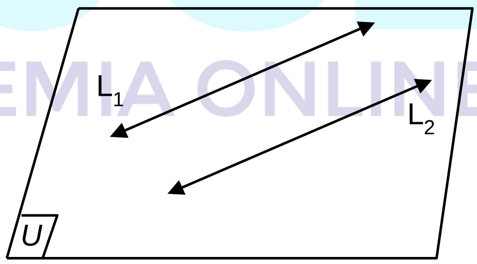
b. **Una recta y un punto exterior a ella.**



c. **Dos rectas secantes.**

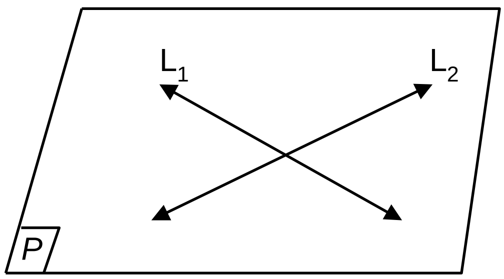


d. **Dos rectas paralelas.**

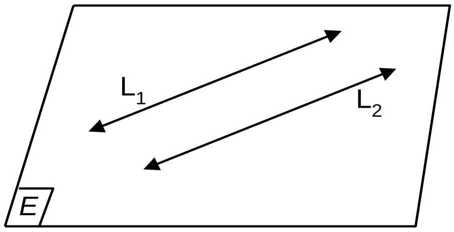


POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

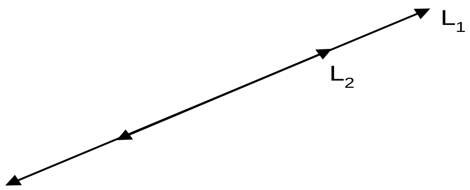
a. **Rectas secantes**.- Cuando se intersectan y tiene por tanto un punto común. Las rectas secantes son coplanares.



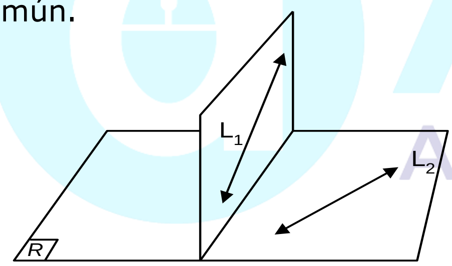
b. **Rectas paralelas**.- Cuando se encuentran en un mismo plano y no se intersectan.



c. **Rectas coincidentes**.- Cuando se superponen, para lo cual basta que tenga dos puntos comunes.



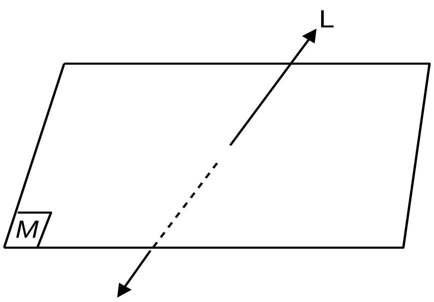
d. **Rectas alabeadas**.- Llamado también rectas que se cruzan, son aquellas rectas que no están en un mismo plano y no tiene ningún punto común.



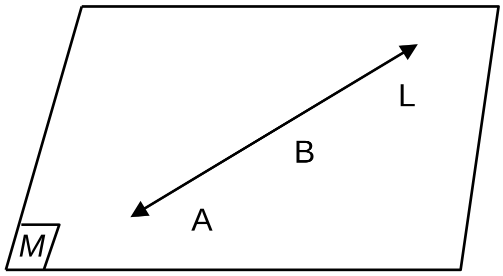
POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO

Dados una recta L y un plano M, que pueden estar situadas de tres distintas maneras.

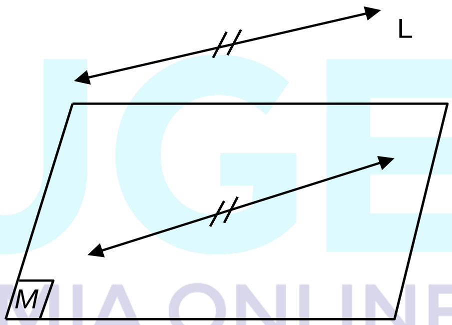
a. Secantes**.- Cuando se intersectan, la recta y el plano sólo tienen un punto común.**



b. Coincidentes. La recta está contenida en el plano, en cuyo caso todos los puntos de la recta pertenecen al plano. Para que sean coincidentes, basta que la recta y el plano tengan dos puntos comunes**.**



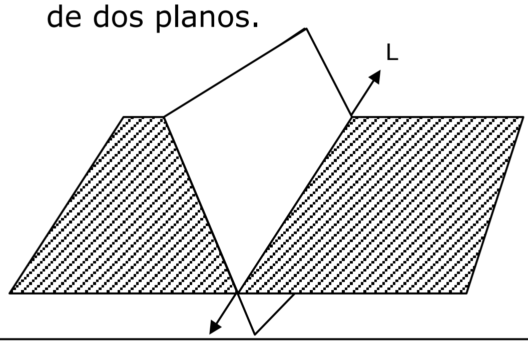
c. Paralelos.- En cuyo caso no tienen punto común alguno.



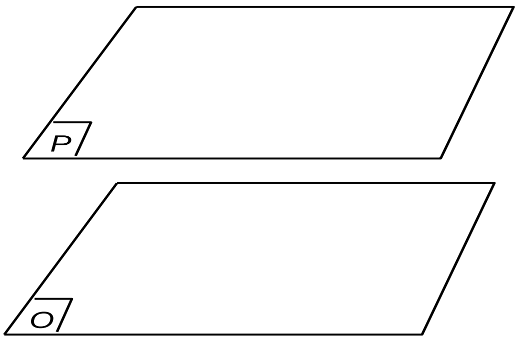
Propiedad: Para que una recta sea paralela a un plano es condición necesaria y suficiente que dicha recta sea paralela a una recta del plano.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

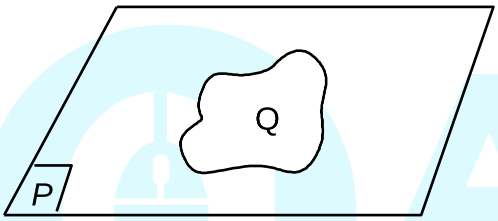
a. **Planos secantes**.- Cuando se intersectan y tiene por tanto una recta común llamada intersección de dos planos.



b. **Planos paralelos**.- Son aquellos que no tienen punto común alguno.

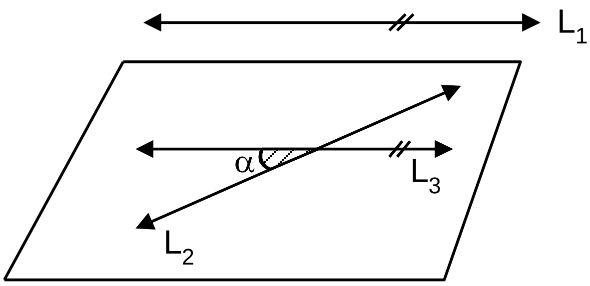


c. **Planos coincidentes**.- Cuando se superponen, para lo cual basta que tenga tres puntos comunes no colineales.



ANGULOS ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

Es el ángulo que forman uno de ellos con una paralela a la otra trazada por un punto cualquiera de la primera.



α: Es el ángulo que forman las rectas que se cruzan L_1 y L_2

RECTAS PERPENDICULARES

Son aquellas dos rectas que al interceptarse o al cruzarse en el espacio forman ángulo recto.

ANGULO DE UNA RECTA SECANTE CON UN PLANO

Es el ángulo que hace la recta con su proyección sobre el plano.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.

La longitud del segmento de perpendicular trazada del punto al plano.

MENOR DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Es la longitud del segmento de perpendicular, común a ambas.

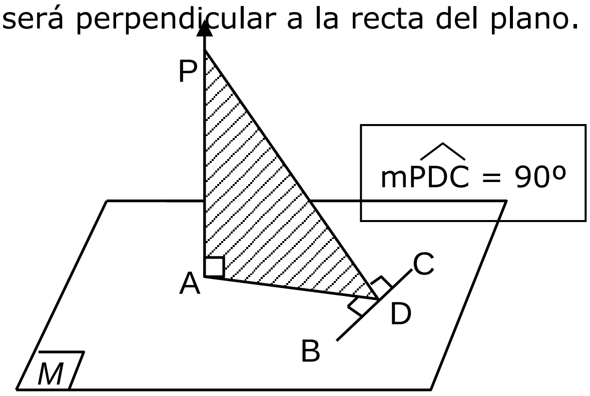
RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

Si una recta es perpendicular a un plano entonces es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano.

Propiedad: Para que una recta sea perpendicular a un plano es condición necesaria y suficiente que dicha recta sea perpendicular a dos rectas secantes del plano.

TEOREMA DE LAS 3 PERPENDICULARES

Si desde el pie de una perpendicular a un plano trazamos una segunda perpendicular a una recta del plano, entonces toda recta que une el pie de la segunda perpendicular con un punto cualquiera de la perpendicular al plano será perpendicular a la recta del plano.

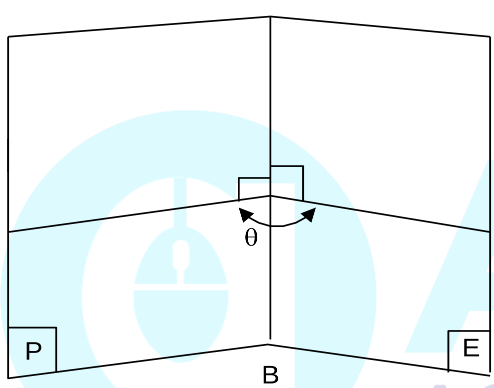


ÁNGULO DIEDRO

Es la figura formada por dos semiplanos que tienen la misma recta de origen común

A los semiplanos se les denominan caras y a la recta común arista

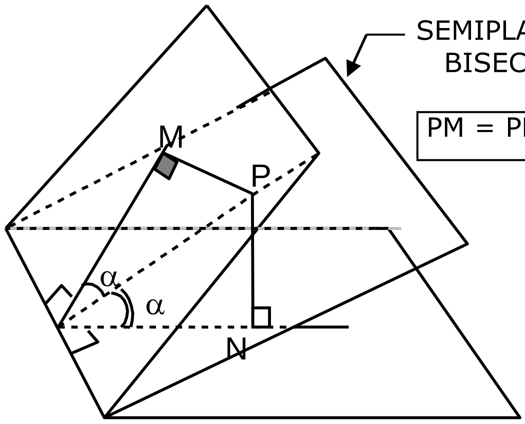
a. La medida de un ángulo diedro θ esta dada por la medida de su ángulo plano o rectilíneo que es aquel ángulo determinado al trazar por un punto cualquiera de la arista AB, dos rectas perpendiculares a la arista, una contenida en cada cara.



b. Los diedros se clasifican similarmente a los ángulos en el plano

b. SEMIPLANO BISECTOR

Es aquel semiplano que partiendo de la arista de un diedro, lo divide en dos diedros de igual medida.

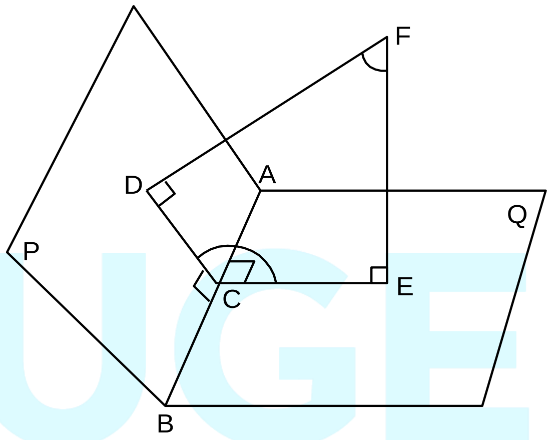


Propiedad.- Todo punto sobre el semiplano bisector, se encuentra a igual distancia de las caras del diedro.

TEOREMA

Si los lados de un ángulo plano son perpendiculares a las caras de un diedro. El ángulo y el diedro son suplementarios.

$$\boxed{m\widehat{C} + m\widehat{F} = 180º}$$

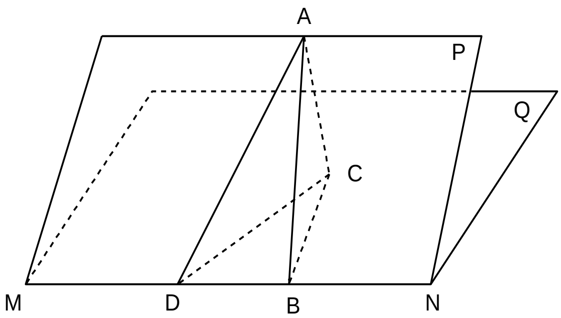


RECTA DE MÁXIMA PENDIENTE

Si dos planos se interceptan, la recta de uno de ellos, que forma el ángulo máximo con el otro, es perpendicular a la intersección de ambos planos.

Hipótesis
$A \in P$
$AC \perp Q$
$AB \perp MN$
AB : Recta de máxima pendiente

Tesis
$m\widehat{ABC} > m\widehat{ADC}$

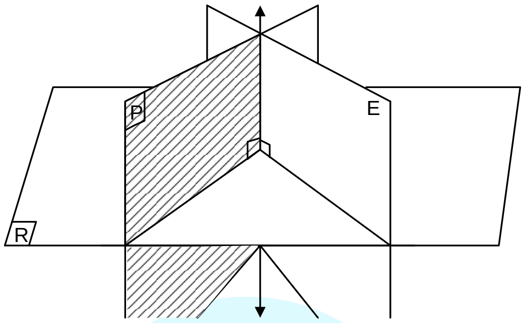


PLANOS PERPENDICULARES

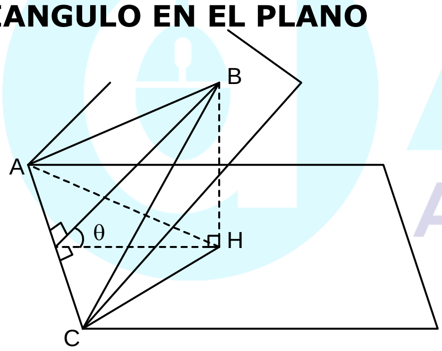
Son aquellos planos que al interceptarse forman diedros rectos.

a. Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pasa por ella es perpendicular al primero.

b. Si dos planos son perpendiculares entre sí, toda recta contenida en uno de ellos y perpendicular a su intersección, es perpendicular al otro plano.



AREA DE LA PROYECCIÓN DE UN TRIANGULO EN EL PLANO



Area (AHC) = Area (ABC). Cos θ

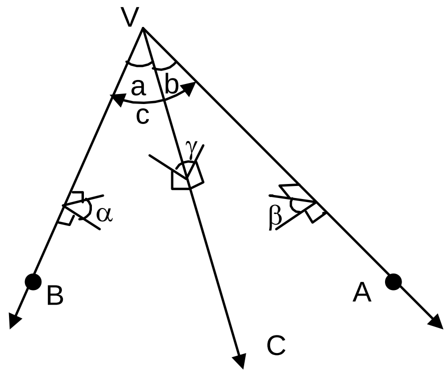
ANGULO POLIEDRO, SÓLIDO O ANGULOIDE

Es la figura formada por tres o más planos (caras), que se cortan dos a dos y cuyas intersecciones (aristas) concurren en un mismo punto denominado vértice.

ANGULO TRIEDRO

El triedro es un ánguloide de tres caras, tres aristas y tres diedros; es el ángulo poliedro de menor número de caras que puede haber, no pudiendo ser más que convexo.

- Caras : a, b, c
- Vértice : El punto V
- Aristas : VA, VB, VC.
- Diedros : α, β, γ



Notación : Triedro V-ABC

PROPIEDADES DE LOS TRIEDROS

a. En todo triedro, una cara es menor que la suma de las otras dos, pero mayor que su diferencia.

$$\boxed{b - c < a < b + c}$$

b. En todo triedro, la suma de sus caras es mayor que 0º pero menor que 360º.

$$\boxed{0^{\circ} < a + b + c < 360^{\circ}}$$

c. En todo triedro a mayor cara se opone mayor diedro y a caras congruentes se oponen diedros congruentes.

d. En todo triedro, la suma de sus diedros es mayor que 180º pero menor que 540º

CLASIFICACION DE TRIEDROS

a. Triedro escaleno: Sus 3 caras tienen diferentes medidas.

b. Triedro isósceles: Dos de sus caras miden iguales.

c. Triedro equiláteros: Sus 3 caras tienen igual medida (no necesariamente de 60º)

d. Triedro rectángulo: Una de sus caras miden 90º.

e. Triedro birectángulo: Dos de sus caras miden 90º cada una.

f. Triedro trirectángulo: Sus 3 caras miden 90º cada una.

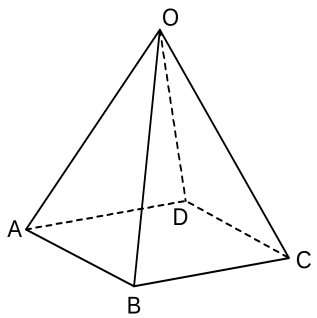
g. Triedro Simétrico: Es aquel formado por las prolongaciones de las aristas de un triedro.

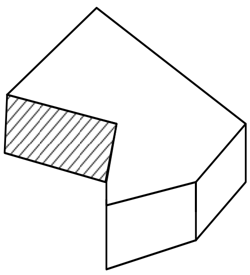
h. Triedro polar o suplementario: Dos triedros son suplementarios cuando las caras de uno son los suplementos de los diedros del otro.

POLIEDROS

Son aquellos sólidos limitados por cuatro o más regiones poligonales planos no coplanares llamados caras.

Elementos:
- Caras: Son polígonos
- Aristas: OA, OB, AB,.....
- Vértices: O, A, B,....
-Diagonal: Es el segmento que une dos vértices que no están en la misma caras.
- Diedros
- Ángulos poliedros





CLASES DE POLIEDROS

a. Poliedros Convexos.-
Cuando al considerar cualquiera de las caras, todo el sólido queda a un mismo lado de él.

b. Poliedros Cóncavos.-
Cuando al considerar alguna de las caras, todo el poliedro queda repartido a uno y otro lado de la cara considerada.

TEOREMA DE EULER

En todo poliedro se cumple que su número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más 2.

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

TEOREMA

En toda poliedro la suma de los ángulos en todas sus caras es igual a 360º por el número de vértices menos 2.

$$\boxed{S\text{Ang. caras} = 360^{\circ}\,(V-2)}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La distancia del punto "P" del espacio, a un plano "H" es 15m y la proyección de $\overline{PQ}$ sobre el plano "H" mide 8m, Q $\in$ L y L $\subset$ "H". Hallar la distancia de "P" a L.

A) 17m B) 18m C) 19m
D) 20m E) $15\sqrt{2}m$

2. Dado el rectángulo ABCD, AB = 2m y BC = 4m. Por el vértice "B" se levanta un segmento $\overline{BE}$ de longitud 3m perpendicular al plano del rectángulo. Si "M" es punto medio de $\overline{AD}$. Hallar $\overline{EM}$

A) $\sqrt{13}m$ B) $\sqrt{17}m$ C) $\sqrt{8}m$
D) $\sqrt{19}m$ E) $\sqrt{21}m$

3. Desde un punto "P" a un plano, se trazan las oblicuas PA y PB (A y B sobre dicho plano), formando los ángulos de 30° y 45° respectivamente con el plano. Si PA= 6. Hallar PB

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 4

D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6}$

4. Del centro "O" del círculo circunscrito a un triángulo equilátero ABC de lado "a" se levanta la perpendicular OD al plano del triángulo y se une el punto D con los tres vértices del triángulo ABC. Calcular la longitud del segmento OD para que el triedro sea trirectángulo.

A) a B) a/2C) 0,5a

D) 0,41a E) 2ª

5. En un triedro SABC, el diedro SA es recto y las caras ASB y ASC son triángulos de 45°. Calcular la cara BSC.

A) 30° B) 60° C) 70°

D) 90° E) 120°

6. Se tiene un triángulo ABC de área 50cm² por AB se pasa un plano que forma un diedro con el plano el triángulo. ¿Cuál es el área del triángulo proyectado sobre el plano, si el diedro mide 60º?

A) 100cm² B) 40cm² C) 30cm²
D) 25cm² E) 50cm²

7. ¿Cuál es el área de la proyección de una cara de un tetraedro regular sobre otra cara cualquiera, si la arista del tetraedro mide $2\sqrt{3}$ cm?

A) 0.8cm² B) $\sqrt{3}$ cm²
C)0.5cm² D) $\sqrt{2}$ cm²
E) $2\sqrt{3}$ cm²

8. En el triángulo ABC recto en B, AB=3, BC=4; sobre la perpendicular al plano del triángulo levantado por el vértice B se toma un punto F. Hallar la distancia de F al lado AC, si BF = 1,8

A)1 B) 2 C) 3
D) 3,5 E) 4

9. ABC es un triángulo rectángulo isósceles (AB = BC = 2). Por "C" se levanta CT perpendicular a su plano. Hallar TM siendo M punto medio de AB además TC=AC

A) 1 B)1,5 C)2

D) 3 E) 3,5

10. Desde un punto "P" de la cima de un poste se observa los puntos A y B del suelo a una misma distancia, además el ángulo BPA = 60°. Hallar la altura del poste sabiendo que el ángulo que forma PA con el suelo es 45° y que AB = 10

A) 5 B) 10 C)15
D)12 E) $5\sqrt{2}$

11. Se tiene un cuadrado de lado igual a 4. Por B se levanta BP perpendicular a su plano, tal que BP = $\sqrt{5}$. Si "M" es punto medio de CD. Hallar la medida del ángulo formado por PM y AD.

A)30° B)45° C)37°
D)53° E)60°

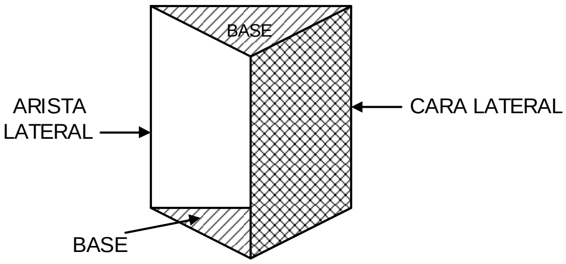
12. En un plano "H" está contenido una circunferencia de centro "O" y radio 5m así mismo la longitud de la cuerda MN es 8m, Por "O" se levanta la perpendicular OA al plano "H". Siendo el ángulo que forman el plano "H" y el plano ANM de 53°, calcular el área de la región triangular.

A) $10m^2$ B) $20m^2$ C)$30m^2$
D) $40m^2$ E) $48m^2$

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

I. PRISMA

Es el sólido geométrico que tiene por bases polígonos paralelos e iguales y por caras laterales paralelogramos.



CLASIFICACIÓN

I. Los prismas se clasifican según sus bases en:
   a) Prisma triangular, si su base es un triángulo.
   b) Prisma cuadrangular, si su base es un cuadrilátero.
   c) Prisma pentagonal, si su base es un pentágono.

II. PRIMA RECTO.

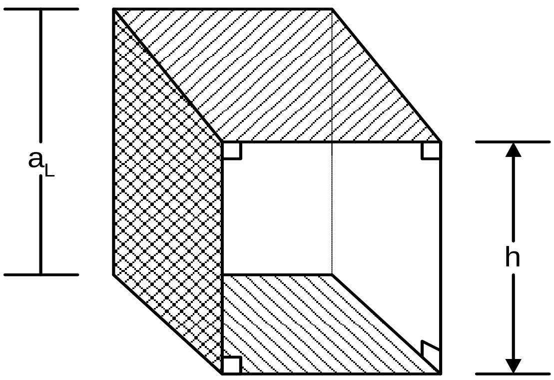
Es aquel prisma que tiene sus aristas laterales perpendiculares a las bases; sus caras laterales son rectángulos; arista lateral igual a la altura del prisma.

A_L = Area Lateral
$2p_B$ = Perímetro de la base
S_B = Area de la base

$$\boxed{A_L = (2p_B)\,(h)}$$

h = Altura
A_T = Area total

$$\boxed{A_T = A_L + 2S_B}$$



$$\boxed{\text{Volumen} = S_B \,.\, h}$$

III. PRISMA REGULAR

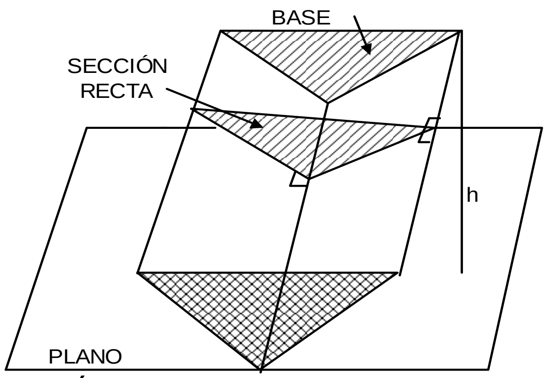
Es un prisma recto, cuyas bases son polígonos regulares.

IV. PRISMA OBLICUO

Es aquel prisma cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases, sus caras laterales son paralelogramos (romboides), la altura es menor que la arista lateral.

Sección Recta del Prisma (S_R)

Es la sección del prisma con un plano perpendicular a las aristas laterales.



S_R = Área de la sección recta.
$2p_{SR}$ = Perímetro de la sección recta.

$$\boxed{A_L = (2p_{SR})\,(a_L)}$$

a_L = Arista lateral

$$A_T = A_L + 2S_B$$

$$\text{Volumen} = S_B.h \qquad \text{Volumen} = S_R \cdot a_L$$

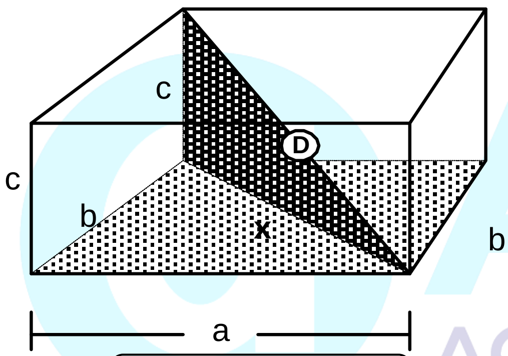
V. PARALELEPÍPEDOS

Son prismas cuyas caras son todos paralelogramos.

Clasificación:

a) Paralelepípedo Rectangular

Es un prisma, llamado también caja rectangular, ortoedro o rectoedro. Todas sus caras son rectángulos.



$$\text{Volumen} = abc$$

$$A_L = 2ac + 2bc$$

$$A_T = A_L + 2S_B$$

$$A_T = 2ac + 2bc + 2ab$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

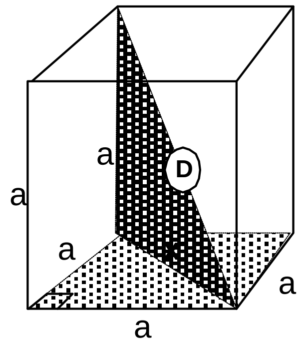
Nota:

$$(a+b+c)^2 = \underbrace{a^2+b^2+c^2}+\underbrace{2ac+2bc+2ab}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Suma de las}\\ \text{3 dimensiones}\end{array}\right)^2 = D^2 + A_T$$

b) **CUBO O HEXAEDRO REGULAR**

Es paralelepípedo en el cual todas sus caras son cuadrados.



$$\text{Volumen} = a^3$$

$$A_L = 4a^2$$

$$A_T = 6a^2$$

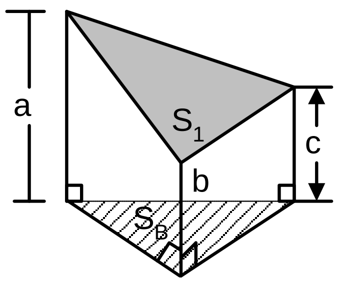
$$D = a\sqrt{3}$$

c) **ROMBOEDRO**

Es un paralelepípedo oblicuo. Todas sus caras son rombos.

TRONCO DE UN PRISMA TRIANGULAR RECTO

Es el sólido que se determina al interceptar a una prima recto con un plano no paralelo a su base.



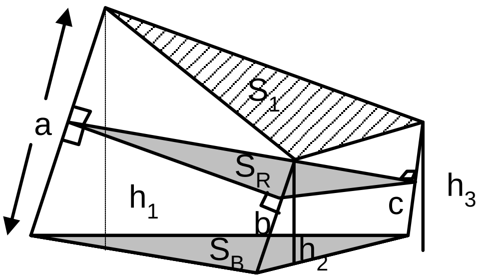
$$\text{Volumen} = S_B\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$A_T = A_L + S_B + S_1$$

TRONCO DE UN PRISMA RECTANGULAR OBLICUO

Es el sólido que se determina al interceptar a un prisma oblicuo con un plano no paralelo a su base.

$$A_T = A_L + S_B + S_1$$

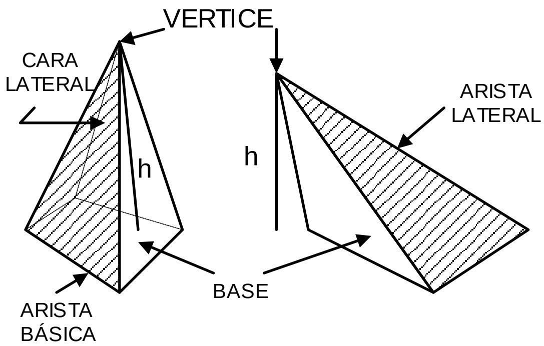


$$\text{Volumen} = S_R\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$\text{Volumen} = S_B\,\frac{(h_1+h_2+h_3)}{3}$$

PIRÁMIDE

Es el sólido geométrico que tiene como base un polígono que tienen un vértice común que viene a ser el vértice de la pirámide y los otros dos vértices de cada triángulos coincide con los vértices de la base respectivamente.



Clasificación:

I. Por el número de lados de su base en:

a) Pirámide triangular, si su base es un triángulo, llamado también tetraedro.

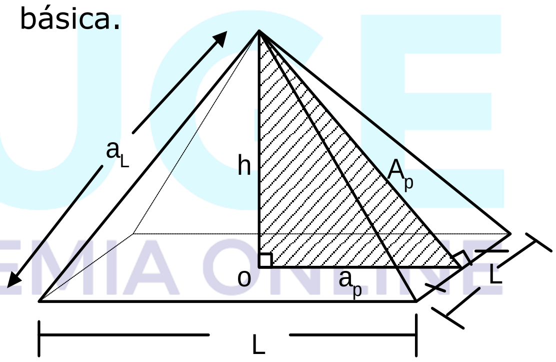
b) Pirámide cuadrangular, si su base es un cuadrilátero.

c) Pirámide pentagonal, si su base es un pentágono, etc.

II. PIRÁMIDE REGULAR.

Es una pirámide cuya base es un polígono regular, sus caras laterales son triángulo isósceles iguales. El pie de la altura coincide con el centro de la base.

APOTEMA DE UNA PIRÁMIDE REGULAR: Es el segmento perpendicular trazado desde el vértice de la pirámide a una arista básica.



A_p = Apotema de la Pirámide
a_p = Apotema de la base.

$$A_p^2 = h^2 + ap^2 \qquad a_L^2 = h^2 + R^2$$

R = Radio de la circunferencia circunscrista a la base.

$$A_L = \text{Semiperímetro de la base} \times A_p$$

$$A_T = A_L + S_B$$

$$\text{Volumen} = \frac{\text{Area de la base} \times h}{3}$$

III. PIRAMIDE IRREGULAR: Es aquella que no cumple con las condiciones de la pirámide regular.

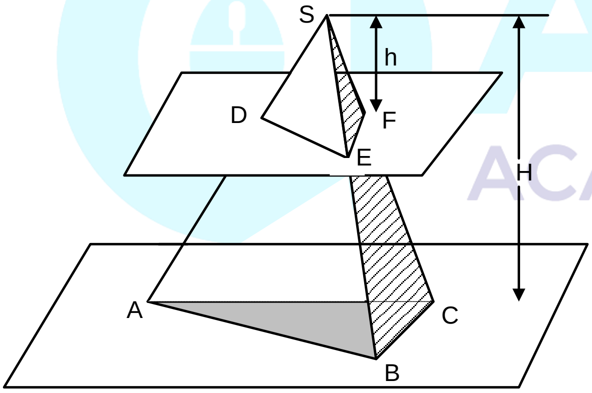
TEOREMA

Si se corta una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base se obtiene una pirámide parcial semejante a la pirámide total.

Propiedades

1) Si dos pirámides son semejantes, las áreas de sus bases son proporcionales a los cuadrados de sus dimensiones homólogas.
2) Los volúmenes de dos pirámides semejantes, son proporcionales a los cubos de sus dimensiones homólogas.

Pirámide S-DEF ~ Pirámide S – ABC



$$\frac{SD}{SA}=\frac{SE}{SB}=\frac{SF}{SC}=\frac{h}{H}$$

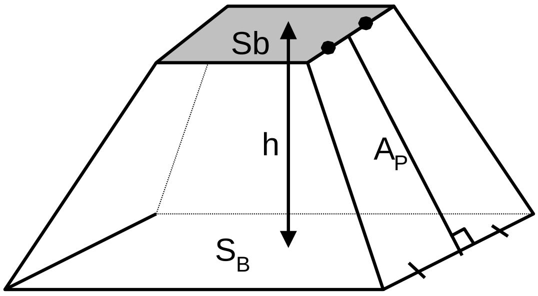
$$\frac{Area(\Delta DEF)}{Area(\Delta ABC)}=\frac{SD^2}{SA^2}=..\frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{\text{Volumen de la pirámide } S-DEF}{\text{Volumen de la pirámide } S-ABC}=\frac{SD^3}{SA^3}=\frac{h^3}{H^3}$$

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Es el sólido que se determina al interceptar a una pirámide regular con un plano paralelo a su base. Sus caras laterales son trapecios isósceles iguales.

Apotema del Tronco de Pirámide Regular: Es el segmento que une los puntos medios de las bases de una cara lateral.



A_L = (p_b + p_B) A_p
A_T = A_L + S_b + S_B

p_b y p_B: Semiperímetro de bases.

$$\text{Volumen} = \frac{h}{3}\left(S_b+S_B+\sqrt{S_b\,.\,S_B}\right)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

01. Hallar el número de caras de un prisma que tiene 360 aristas

a) 120 b) 121 c) 122
d) 123 e) 124

Resolución

C : Número de Caras del prima
x : Número de Caras laterales

$$x=\frac{360}{3}\rightarrow \quad x=120$$

C = x+2 → C= 120+2

$\boxed{C = 122}$ **Rpta. c**

2. Hallar el número de vértices de un prisma que tiene 120 aristas.

a) 80 b) 81 c) 82
d) 83 e) 84

Resolución

V : Número de vértices del prisma
X : Número de caras laterales

$$X = \frac{120}{3} \rightarrow x = 40$$

$$V = 2x \rightarrow V = 2(40)$$

$\boxed{V = 80}$ **Rpta. a**

3. Hallar la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras de un prisma que tiene "A" aristas

a) 120º (A-2) b) 180º (A-2)

c) 360º (A-2) d) 240º (A-3)

e) 240º (A-2)

Resolución

X : Número de caras laterales
S: Suma de las medidas de los ángulos de todas las caras del prisma.

1) $S = 2\,[180º(x-2)]+360ºx$ ..(1)

2) $x = \frac{A}{3}$ ....(2)

3) Reemplazando (2) a (1)

$$S = 360º\left(\frac{A}{3}-2\right)+360º\,\frac{A}{3}$$

$$S = 120ºA - 720 + 120ºA$$

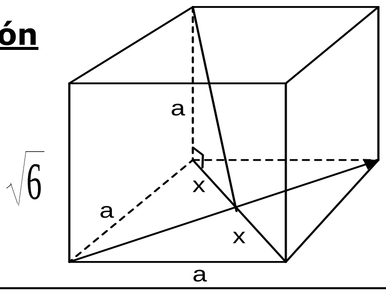
$$S = 240º\,A - 720º$$

$\boxed{S = 240º(A-3)}$ **Rpta. d**

4. La distancia de un vértice al centro de la cara opuesta de un cubo es $\sqrt{6}$. Calcular el área total.

a) 12 b) 16 c) 20 d) 24 e) 28

Resolución



1) $2x = a\sqrt{2}$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \ ...(1)$$

2) Pitágoras $a^2+x^2=\sqrt{6}^{\,2}$ ...(2)

3) Reemplazando (1) en (2)

$$a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 6$$

$$a^2 = 4$$

4) A_T: Area Total

$A_T = 6a^2$

$A_T = 6(4)$

$\boxed{A_T = 24}$ **Rpta. d**

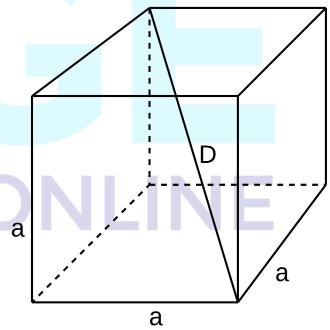
5. Calcular el volumen de un hexaedro regular cuya diagonal mide $20\sqrt{3}$ cm.

a) 80 cm^3 b) 800 cm^3

c) 400 cm^3 d) 80 dm^3

e) 8 dm^3

Resolución



1) Dato $D = 20\sqrt{3}$ cm...(1)

2) Formula $D = a\sqrt{3}$ ...(2)

3) Igualando (2)=(1)

$a\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ cm

a = 20cm

a = 2dm

4) Volumen = a^3

Volumen = $(2dm)^3$

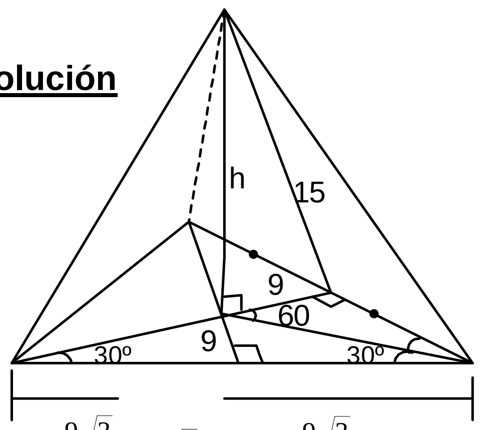
$\boxed{\text{Volumen} = 8dm^3}$ **Rpta. e**

6. Calcular el volumen de una pirámide regular, si su apotema mide 15 y la arista de la base mide $18\sqrt{3}$

a) $314\sqrt{3}$ b) $628\sqrt{3}$ c) $972\sqrt{3}$

d) $916\sqrt{3}$ e) $428\sqrt{3}$

Resolución



1) Pitágoras

$h^2+9^2=15^2$

h = 12...(1)

2) Volumen = $\frac{B\ x\ h}{3}$ ..(2)

3) B : Area de la base

$$B=\frac{\left(18\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}$$

B = $243\sqrt{3}$ ..(3)

4) Reemplazando (1) y (3) en (2)

$$\text{Volumen}=\frac{243\sqrt{3}\ x\ 12}{3}$$

$\boxed{\textbf{Volumen = 972}\ \sqrt{3}}$ **Rpta. c**

7. El volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular es $74cm^3$. Si su altura mide 6cm y el área de una de sus bases es $16cm^2$? ¿Cuál es el área de la otra Base?

a) $3cm^2$ b) $6cm^2$ c) $8cm^2$

d) $9cm^2$ e) $4cm^2$

Resolución

Volumen = $\frac{h}{3}(B+b+\sqrt{B.b})$

74 = $\frac{6}{3}\left(16+b+\sqrt{16.b}\right)$

37 = 16 + b+4$\sqrt{b}$

$\sqrt{b}=x \quad \Rightarrow \quad b=x^2$

37 = 16 + x^2 + 4x

x^2 + 4x – 21 = 0

(x + 7) (x - 3) = 0

x = 3

$\boxed{\mathbf{b = 3^2 = 9}}$ **Rpta. d**

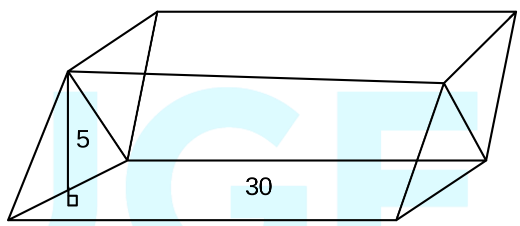
8. Calcular el volumen de un prisma triangular oblicuo. Si el área de una cara lateral es 30 y la distancia de la arista lateral opuesta a dicha cara es 5.

a) 100 b) 125 c) 90

d) 80 e) 75

Resolución

El volumen del prisma triangular oblicuo vale la mitad del paralelepípedo.



Volumen = $\frac{30(5)}{2}$

$\boxed{\text{Volumen = 75}}$ Rpta. e

EJERCICIOS

1. En un prisma recto triangular ABC – A´B´C´, MB´= 5, AB = BC = 6, m∠ABC = 120°. Calcular el volumen del prisma si "M" es punto medio de AC.

A)12$\sqrt{2}$ B)24$\sqrt{3}$ C)24$\sqrt{2}$

D)36$\sqrt{3}$ E)18$\sqrt{6}$

2. Calcular el volumen de un prisma recto ABCD – A´B´C´D´ cuya base ABCD es un trapecio isósceles, sabiendo que AA´ = AD = 2BC = 12 y AB = 5. Las bases son AD y BC y AD> BC.

A) 432 B)156 C) 312
D) 104 E) 300

3. En un recipiente cúbico que contiene $35m^3$ de agua se introduce un cubo macizo de modo que el agua se eleva hasta alcanzar el nivel del recipiente. Si la arista del cubo macizo es la mitad de la arista del recipiente, calcular el volumen del recipiente.
A) $20m^3$ B) 40 m^3 C)60 m^3
D) 80 m^3 E) 100 m^3

4. La base de un prisma triangular regular es inscriptible en una circunferencia de radio igual a $8\sqrt{3}$ cm. Si la altura del prisma es el doble del apotema de la base. Hallar el área lateral del sólido.
A) $576\sqrt{3}$ B) $192\sqrt{3}$ C) 576
D) $288\sqrt{3}$ E) 288

5. El desarrollo de la superficie lateral de un prisma triangular regular es un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 3m. Hallar el volumen del prisma.
A) $\sqrt{6}/2$ B) $2\sqrt{6}/3$ C) $2\sqrt{6}$
D) $3\sqrt{6}/2$ E) $3\sqrt{6}$

6. Calcular el volumen de un prisma regular cuadrangular ABCD – EFGH, si el área de la base es $4m^2$ y m $\angle EBH = 30°$.
A) $16m^3$ B) $6\sqrt{3}\,m^3$ C)$8\sqrt{2}\ m^3$
D) $4\sqrt{6}\,m^3$ E) $5\sqrt{5}\,m^3$

7. Calcular el volumen de un prisma regular de base pentagonal si se sabe que el apotema de la base mide 4u y el área de una cara lateral es 16 u^2.

A) $80u^3$ B)$120u^3$ C)$140u^3$
D) $160u^3$ E) $180u^3$

8. La arista lateral de un paralelepípedo rectangular mide 4cm y las otras dos medidas están en la relación de 1 a 3. Si el área total es $88cm^2$. Calcular el volumen del paralelepípedo.
A) $32cm^3$ B) $60cm^3$ C)$36cm^3$
D) $24cm^3$ E) $48cm^3$

9. La base de un prisma recto es un rombo de área S. Las áreas de las secciones diagonales son iguales a S_1 y S_2. Haller el volumen del prisma.
A) $\sqrt{\frac{SS_1S_2}{6}}$ B) $\sqrt{\frac{SS_1S_2}{5}}$ C) $\sqrt{\frac{SS_1S_2}{4}}$
D) $\sqrt{\frac{SS_1S_2}{3}}$ E) $\sqrt{\frac{SS_1S_2}{2}}$

10. Calcular el volumen de un rectoedro, sí su diagonal mide 10 y forma un ángulo de 45° con la base y un ángulo de 30° con una cara lateral.

A) 120 B) $120\sqrt{2}$ C) 125
D) 100 E) $125\sqrt{2}$.

11. En una pirámide triangular, su apotema mide 16 y sus aristas laterales miden 20. Halle el área lateral de dicha pirámide.
A) 570 B) 600 C) 576
D) 610 E) 616

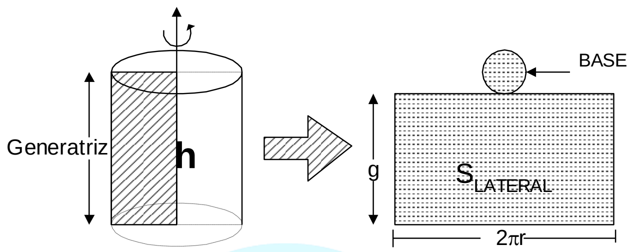
12. Si una pirámide posee 242 aristas. Calcular su cantidad de vértices y su cantidad de caras.
A) 120 ; 120 B) 122 ; 122
C) 124 ; 121 D) 118 ; 126
E) 126 ; 118

CILINDRO Y CONO

CILINDRO RECTO O CILINDRO DE REVOLUCIÓN

Es el sólido generado por un rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus lados tomado como EJE.

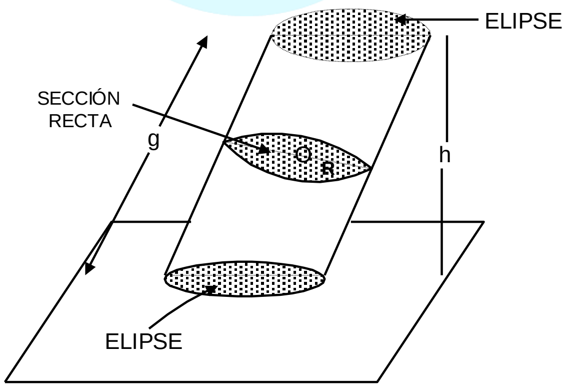
DESARROLLO DE SU SUPERFICIE



1. $S_{Lateral} = 2\pi rg$
2. $S_{Total} = 2\pi r\,(g + r)$
3. $V = \pi\, r^2\, h$

CILINDRO OBLÍCUO

Si se corta a un cilindro recto con dos planos paralelos se obtiene un cilindro oblicuo cuyas bases son elipses.

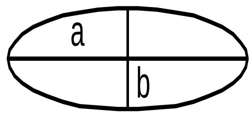


1. $S_{Lateral} = 2\pi Rg$
   R = Radio de la Sección Recta

2. $S_{Total} = S_{Lateral} + 2\, S_{Base}$

3. Volumen = $S_{Sección\ recta} \times g$
   Volumen = $S_{Base} \times h$

ELIPSE



b → Semi-eje menor
a → Semi – eje mayor

$$S = \pi ab$$

TRONCO DE CILINDRO RECTO

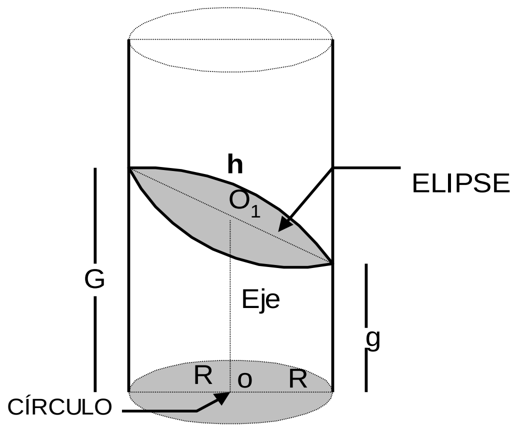
Es el sólido que se determina al cortar a un cilindro recto con un plano secante no paralelo a sus bases.

EJE DE UN TRONCO DE CILINDRO

Es el segmento de recta que une los centros de las bases de un tronco de cilindro, es igual a la semisuma de la generatriz máxima y la generatriz mínima

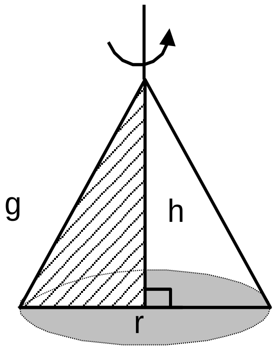
$$EJE = \overline{00_1} = \frac{G+g}{2}$$

1. $S_{Lateral} = 2\pi R\ .\ EJE$
2. $S_{Total} = 2\ \pi R\ .\ EJE + \pi R^2 + \pi ab$
3. $V = \pi R^2\ .\ EJE$

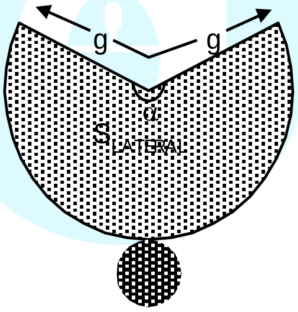


CONO RECTO O DE REVOLUCIÓN

Es el sólido generado por la rotación de un triángulo rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus catetos, tomado como eje. El cateto eje es la altura del cono, el otro cateto es el radio de la base y la hipotenusa es la generatriz del cono.



Desarrollo de su superficie



1. $S_{Lateral} = \pi rg$

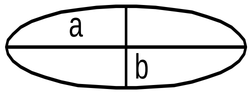
   $S_{Lateral} = \pi g^2 \dfrac{\alpha^o}{360^o}$

   $\alpha = \dfrac{r}{g} . 360^o$
2. $S_{Total} = \pi r\,(g + r)$
3. $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

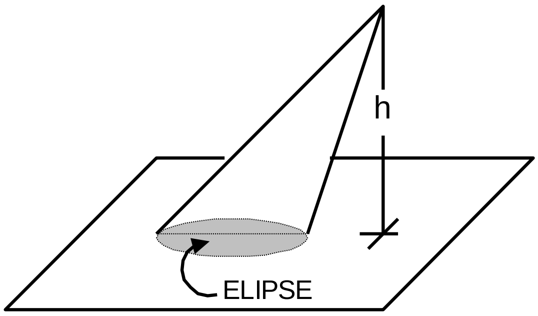
CONO OBLÍCUO

Es el sólido que se determina al cortar a un cono recto con un plano no paralelo a su base. Su base es una elipse.

$$V = \frac{1}{3} S_{Base} \,.\, h = \frac{1}{3}\,\pi abh$$

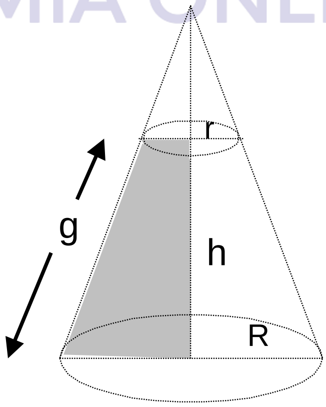


$S_{Base} = \pi\ ab$



TRONCO DE CONO RECTO O DE REVOLUCIÓN

Es el sólido que se determina al cortar a un cono recto con un plano paralelo a su base. Se puede considerar como el sólido generado por la rotación de un trapecio rectángulo alrededor del lado perpendicular a las bases.

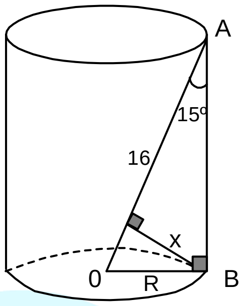


1. $S_{Lateral} = \pi g\,(r + R)$
2. $S_{Total} = \pi g \,.\, (r + R) + \pi(R^2 + r^2)$
3. $V = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En la figura "O" es el centro de la, base inferior del cilindro cuya área lateral se desea calcular, si OA = 16.
A) 96π
B) 84π
C) 128π
D) 132π
E) 106π

Resolución



1) Triángulo OBA(15º y 75º)
$x = \frac{16}{4} \rightarrow x = 4$

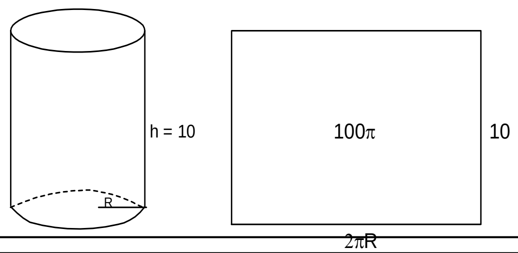
2) Relaciones Métricas
$Rh = 16x$
$Rh = 16(4) = 64$

3) A_L : Area lateral
A_L : $2\pi Rh$
A_L : $2\pi(64)$

$\boxed{A_L = 128\pi}$ **Rpta. c**

2. Calcular el volumen de un cilindro de revolución de 10cm de altura. Si el desarrollo de su superficie lateral tiene por área $100\pi cm^2$
a) $250\pi cm^3$ b) $240\pi cm^3$
c) $210\pi cm^3$ d) $80\pi cm^3$

Resolución



$2\pi R\ (10) = 100\pi$
$R = 5$

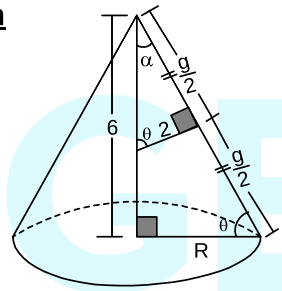
Volumen $= \pi R^2(10)$
Volumen $= \pi 5^2(10)$

$\boxed{\text{Volumen} = 250\pi}$ **Rpta. a**

3. En un cono recto de revolución cuya altura mide 6 la mediatriz de una de sus generatrices intercepta a la altura tal que el segmento de mediatriz determinado mide 2. Hallar el área lateral del cono.

a) 16π b) 20π c) 24π
d) 30π e) 27π

Resolución



1) A_L: Area lateral del cono
$A_L = \pi Rg$ ....(1)

2) Semejanza de triángulo
$\alpha \rightarrow \frac{R}{6} = \frac{2}{\frac{g}{2}}$
$\theta \rightarrow$
$Rg = 24$ ....(2)

3) Reemplazando (2) en (1)
$A_L = \pi(24)$

$\boxed{A_L = 24\pi}$ **Rpta. c**

EJERCICIOS

1. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro recto es un cuadrado de área "S". Calcular el volumen del cilindro.

A) $S\sqrt{S}/2\pi$ B) $S\sqrt{S}/3\pi$
C) $S\sqrt{S}/4\pi$

D) $S\sqrt{s}/5\pi$ E) $S\sqrt{s}/4\pi$

2. Un cilindro, cuya altura es igual al diámetro de la base, tiene un área total de $12\pi cm^2$. Calcular su volumen.

A) $8\pi cm^3$ B) 16π□m^3 C) $32\pi cm^3$
D) $4\sqrt{2}\,\pi cm^3$ E) $8\sqrt{2}\,\pi cm^3$

3. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro tiene una diagonal igual a 13. Si la altura del cilindro mide 5, calcular su volumen :
A) $720/\pi$ B) $180/\pi$ C) $90/\pi$
D) $45/\pi$ E) $360/\pi$

4. Calcular el volumen de un cilindro de revolución, si el área de su superficie de total es $24\pi\ u^2$ y su sección axial es una región cuadrada.
A) $12\pi\ u^2$ B) $16\pi\ u^2$ C) $18\pi\ u^2$
D) 24□$\pi\ u^2$ E) 28□$\pi\ u^2$

5. Hallar el volumen del cilindro de revolución generado por una región cuadrada de diagonal $4\sqrt{2}$ que gira alrededor de uno de sus lados
A) 16π□u^3 B) 64π □u^3
C) 8π□u^3 D) 32π□u^3 E) 60 π□u^3

6. Se tiene un tronco de cilindro de revolución cuya generatriz mínima es nula, la generatriz máxima mide 8m, el radio de la esfera inscrita mide 2m. Hallar el volumen del tronco.
A) $24\pi m^3$ B) $36\pi m^3$ C) $42\pi m^3$
D) $48\pi m^3$ E) $60\pi m^3$

7. Un cono de revolución tiene como radio de la base 6m y como altura 8m. A que distancia del vértice se le debe cortar con un plano paralelo a la base de tal manera que el área total del pequeño cono obtenido sea igual al área lateral del cono total.

A) $\sqrt{40}$ B) $\sqrt{50}$ C) $\sqrt{20}$D
D) 16 E) 10

8. Hallar el volumen de un cono si el ángulo del sector circular que se obtiene al desarrollar el área lateral del cono es 288° y la generatriz es 10m.
A) $24\pi m^3$ B) 128π C) 32π
D) 36π E) 100π

9. Hallar el volumen de un cono equilátero. Sabiendo que la esfera inscrita tiene un radio que mide 6m.
A) $648\pi m^3$ B) $636\pi m^3$ C) $484\pi m^3$
D) $564\pi m^3$ E) $600\pi m^3$

10. Un recipiente tronco cónico de radios 3 y 6 en las bases contiene agua hasta los 2/3 de su altura; se le introduce una esfera de $182\pi\ m^3$ tal que queda sumergida elevándose el nivel de agua hasta enrasar la base superior. Hallar la altura del recipiente.
A) 16m B) 18 C)35
D) 20 E) 15

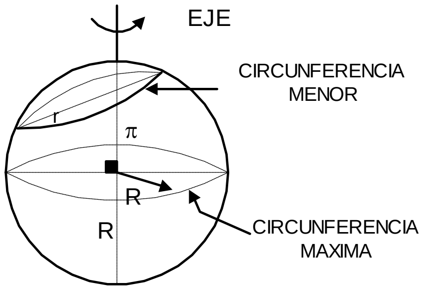
11. Un cilindro macizo de plomo tiene un diámetro "D" y una altura "D" se funde el cilindro para obtener 2 sólidos: un cono recto y una esfera. Si el cono tiene una altura D una base con diámetro "D". ¿Que diámetro tendrá la esfera?.
a) D/3 b) D/2 c) D
d) 2D e) 3D

12. Los radios de las bases de un tronco de cono recto miden R y r (R mayor que r). ¿Cuál debe ser la medida de la altura para que el área lateral sea igual a la suma de las áreas de las bases?
a) $\dfrac{2Rr}{(R+r)}$ b) $\dfrac{4Rr}{(R+r)}$
c) $\dfrac{Rr}{(R+r)}$ d) $\dfrac{Rr}{2(R+r)}$ e) n.a.

ESFERA
ROTACIONES DE SÓLIDOS

SUPERFICIE ESFÉRICA

Es la superficie por la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro tomado como eje.



$S = 4\pi R^2$

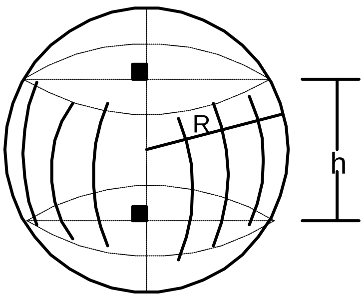
PARTES DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA

1. ZONA ESFÉRICA

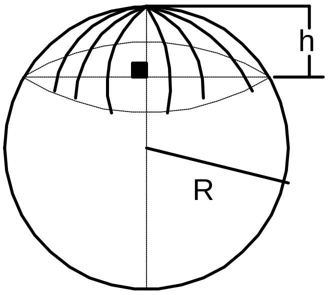
Es la parte de la superficie de la esfera comprendido entre dos planos paralelos; cuando los dos planos son secantes se obtiene, la zona de dos bases y cuando uno de los planos es tangente y el otro secante se obtiene la zona de una base o casquete esférico.

a) Zona de dos bases

$S = 2\pi Rh$



b) Zona de una base o casquete esférico

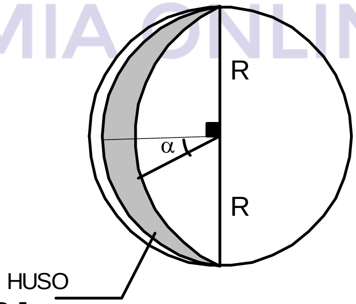


$S = 2\pi Rh$

2. HUSO ESFÉRICO

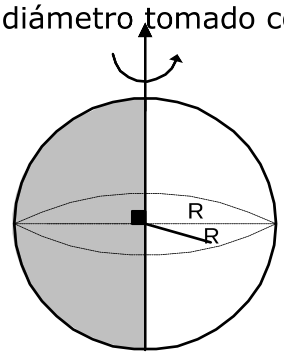
Es la parte de la superficie esférica limitado por dos semicircunferencias máximas q^T tienen un mismo diámetro.

$$S_{Huso} = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha^o}{90^o}$$



ESFERA

Es el sólido generado por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro tomado como eje.

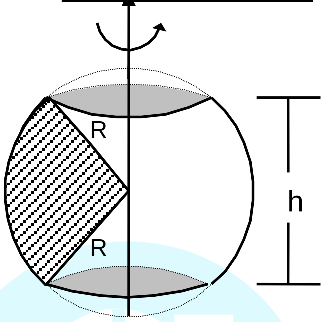


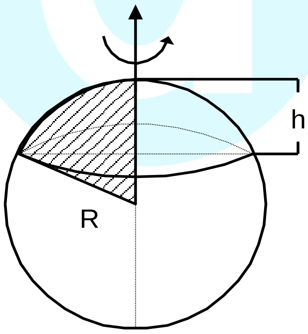
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

PARTES DE VOLÚMENES DE ESFERA

1. Sector esférico. Es el sólido generado por un sector circular que gira alrededor de un eje coplanar que pasa por su vértice sin cortarlo.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

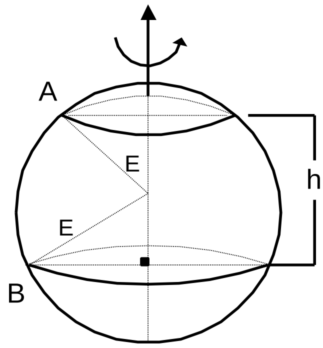




$$v = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

2. Anillo Esférico

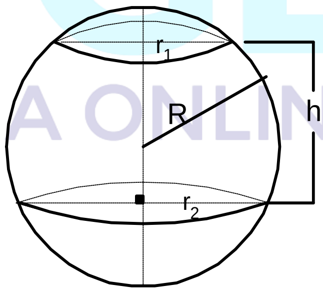
Es el sólido generado por la rotación de un segmento circular cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por el centro del círculo a que pertenece del segmento circular.



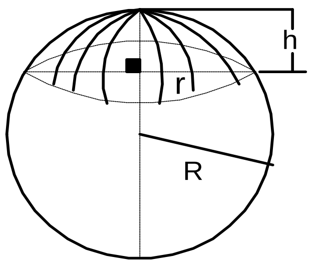
$$V = \frac{1}{6}\pi \overline{AB}^2 .h$$

3. Segmento Esférico

Es la parte del volumen de una esfera limitado por dos planos paralelos; cuando los dos planos son secantes se obtiene un segmento esférico de dos bases y cuando uno de los planos es tangente y el otro secante se obtiene un segmento esférico de una base.



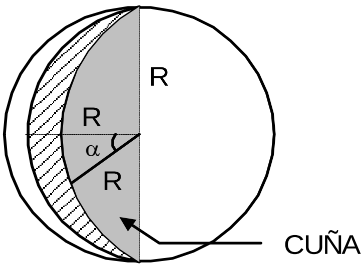
$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi h}{2}\left(r_1^2 + r_2^2\right)$$



$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi r^2}{2} h$$

4. Cuña Esférica

Es la parte de la esfera limitado por dos semicírculos máximos que tienen su mismo diámetro.

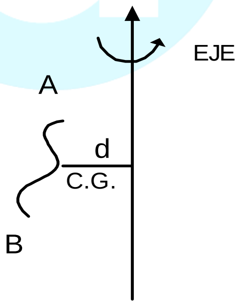


$$V_{Cuña} = \pi R^3 \times \frac{\alpha^o}{270^o}$$

TEOREMAS DE PAPPUS Y GULDIN

1º TEOREMA

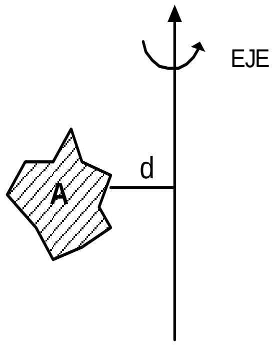
El área de la superficie que genera una línea plana cuando gira alrededor de un eje coplanar es igual a la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad por la longitud de la línea.



$$S = 2\pi d \cdot L_{AB}$$

2º TEOREMA

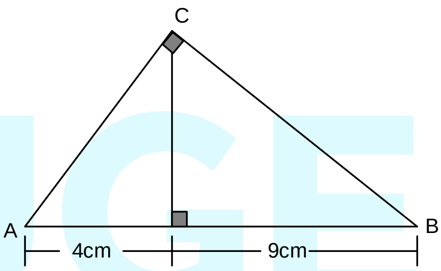
El volumen que genera una superficie plana cuando gira alrededor de un eje coplanar es igual a la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad por el área de la superficie plana.



$$V = 2\pi d \cdot A$$

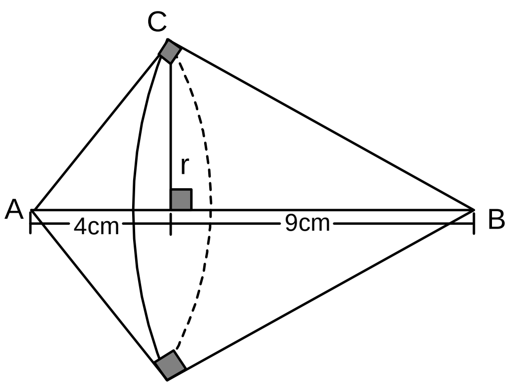
PROBLEMAS RESUELTOS

1. El volumen del sólido generado por la rotación sobre el segmento AB del triángulo.



a) 152π cm^3
b) 239π cm^3
c) 210π cm^3
d) 156π cm^3
e) 196π cm^3

Resolución



1) ◺ ACB Relaciones Métricas
$r^2 = 4(9)$
$r = 6$

2) Al girar, se forma dos conos

$$\text{Volumen} = \frac{\pi 6^2 x9}{3} + \frac{\pi 6^2 x4}{3}$$

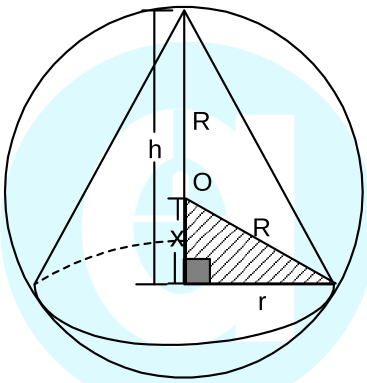
Volumen = 108π + 48π

$\boxed{\text{Volumen} = 156\pi}$ **Rpta. d**

2. En una esfera de radio R se inscribe un cono de altura h y base de radio r, la relación entre r, h y R es:

a) h+r =2R b) h = R+r
c) $R^2+h^2 = 2Rr$ d) $r^2+h^2 = 2Rh$
e) $R^2+r^2 = 2rh$

Resolución



1) x + R = h
x = h – R ....(1)

2) Pitágoras
$r^2+x^2 = R^2$ .....(2)

3) Reemplazando (1) en (2)
$r^2+(h-R)^2 = R^2$
$r^2+h^2-2Rh+R^2 = R^2$

$\boxed{\mathbf{r^2 + h^2 = 2Rh}}$ **Rpta.** d

6. Los radios de dos esferas son entre si como 2 es a 3. Si el área de la primera es 400cm² ¿Calcular el área de la segunda esfera?
a) $600cm^2$ b) $800cm^2$
c) $900cm^2$ d) $1200cm^2$
e) $1600cm^2$

Resolución

S: área de la segunda esfera

$$\frac{400}{S} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \rightarrow \boxed{S = 900cm^2}$$ Rpta. c

3. Una esfera de cobre se funde y con el metal se hacen conos del mismo radio que la esfera y de altura igual al doble de dicho radio ¿Cuántos conos se obtienen?

a) 1 b) 2 c)3 d)4 e)5

Resolución

x : Número de conos

$$x\left(\frac{\pi R^2 x 2R}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$\boxed{\mathbf{x = 2}}$ **Rpta. b**

EJERCICIOS

01.Determinar a que distancia del centro de una esfera de radio $R=(2+\sqrt{5})m$ se debe seccionar con un plano para que la diferencia de las áreas de los casquetes esféricos determinados sea igual al área de la sección que divide a la esfera en dichos casquetes.
a) 0,6m b) 0,8m c) 1m
d) 2m e) 3m

02.Hallar el área de la sección que se determina al intersecarse una esfera y un cono, ambos inscritos en un cilindro recto cuyo radio de la base es $\sqrt{5}m$.
a) $2\pi m^2$ b) $4\pi m^2$ c) $8\pi m^2$
d) $12\pi m^2$ e) $15\pi m^2$

4

03.Se tiene una esfera cuyo radio mide 1m, un cilindro y un cono equilátero circunscrito a esta esfera hallar la suma de los volúmenes de los tres sólidos.

a) $\frac{19\pi}{3}m^3$ b) $\frac{26\pi}{3}m^3$ c) $\frac{13\pi}{3}m^3$

d) $\frac{6\pi}{3}m^3$ e) $\frac{14\pi}{3}m^3$

04.En una esfera de radio R se halla inscrito un cono circular recto de altura "h", hallar la superficie lateral del cono.

a) $\pi h\sqrt{(2R-h)R}$ b) $\frac{\pi h}{2}\sqrt{(2R-h)R}$

c) $\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$ d) $\pi h\sqrt{Rh}$

e) $\pi h\sqrt{(3R-h)R}$

05.Calcular el volumen de una esfera circunscrita a un octaedro regular de $1/\pi m^3$ de volumen.

a) $1m^3$ b) $0,5m^3$ c) $1,5m^3$

d) πm^3 e) N.A.

06.Sean E_1 y E_2 dos esfera, si el volumen de E_2 es el doble del volumen E_1 y el radio de $E_1 = \sqrt[3]{16}cm$.

Hallar el volumen de E_2.

a) $612\pi cm^3$ b) $\frac{512}{3}\pi cm^3$

c) $412\pi cm^3$ d) $\frac{128}{3}\pi cm^3$ e) $552\pi cm^3$

07.Hallar el área total de un cono circunscrito a dos esferas tangentes exteriores cuyos radios son 1 y 3m.

a) $9\pi m^2$ b) $36\pi m^2$ c) $72\pi m^2$

d) $81\pi m^2$ e) $120\pi m^2$

08.La suma de las inversas de las medidas de las 4 alturas de un tetraedro es 1/6. Hallar la medida del radio de la esfera inscrita.

a) 2 b) 3 c) 6

d) 12 e) n.a.

09.Calcular el volumen de la cuña esférica, si el área del huso esférico de 30º es de $108\pi m^2$.

a) $624\pi m^3$ b) $630\pi m^3$ c) $640\pi m^3$

d) $648\pi m^3$ e) $650\pi m^3$

10.Es una esfera de 15m de radio, dos planos paralelos distantes 8m, seccionan a la esfera. Hallar el área de la zona.

a) 653.60 m² b) 753.60 m²

c) 743.60 m² d) 733.60 m²

e) n.a.

11.Un cilindro macizo de plomo tiene un diámetro "D" y una altura "D" se funde el cilindro para obtener 2 sólidos: un cono recto y una esfera. Si el cono tiene una altura D una base con diámetro "D". ¿Que diámetro tendrá la esfera?.

a) D/3 b) D/2 c) D

d) 2D e) 3D

12.Los radios de las bases de un tronco de cono recto miden R y r (R mayor que r). ¿Cuál debe ser la medida de la altura para que el área lateral sea igual a la suma de las áreas de las bases?

a) $\frac{2Rr}{(R+r)}$ b) $\frac{4Rr}{(R+r)}$

c) $\frac{Rr}{(R+r)}$ d) $\frac{Rr}{2(R+r)}$ e) 2Rr

13.Se circunscribe un cono circular recto a 2 esferas tangentes exteriormente de radios 2 y 6.

Evaluar la altura del cono:

a) 18 b) 17 c) $15\sqrt{2}$

d) 12 e) 20